Abzählbar-primitive Ultrafilter

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 43, 1992, S.13-33

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Abzählbar-primitive Ultrafilter

Von **Hans-Joachim Kowalsky***, Braunschweig

(Eingegangen am 9.10.1992)

Einleitung

Die Menge $\mathfrak{A}$ aller Ultrafilter einer hier zunächst als abzählbar unendlich vorausgesetzten Grundmenge X kann in bekannter Weise mit einer Präordnung $\blacktriangleleft$ versehen werden: Für je zwei Ultrafilter $\mathfrak{u},\mathfrak{v}$ sei $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$ gleichwertig damit, daß es eine Abbildung $\varphi\colon X \to X$ mit $\varphi\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ gibt. Hinsichtlich der zu dieser Präordnung gehörenden Äquivalenzrelation $\sim$ gilt für zwei Ultrafilter $\mathfrak{u},\mathfrak{v}$ genau dann $\mathfrak{u} \sim \mathfrak{v}$, wenn es Abbildungen φ,ψ mit $\varphi\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ und $\psi\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ gibt. Dies ist gleichwertig damit, daß φ auf einer Filtermenge $V \in \mathfrak{v}$ injektiv ist und daß bei dieser Einschränkung dann ψ die Umkehrabbildung von φ ist. Alle gebundenen Ultrafilter, nämlich die von einpunktigen Mengen erzeugten Hauptfilter, sind äquivalent und minimal hinsichtlich der Präordnung. Obere Nachbarn von ihnen sind die bekannten primitiven Ultrafilter. Darüber hinaus ist die durch die Präordnung bestimmte Struktur von $\mathfrak{A}$ jedoch äußerst kompliziert. Um übersichtlichere Verhältnisse zu gewinnen, ist es daher naheliegend, zunächst spezielle Teilmengen von $\mathfrak{A}$ bezüglich der induzierten Präordnung zu untersuchen. Die vorliegende Arbeit stellt einen Anfang in dieser Richtung dar. Sie bezieht sich auf abzählbar-primitive Ultrafilter, die sich mit einem bekannten Prozeß aus abzählbar vielen primitiven Ultrafiltern aufbauen lassen. Ihre Ordnungsstruktur und im Zusammenhang damit ihr Abbildungsverhalten sowie die Bestimmung unterer und oberer Nachbarn sind der hauptsächliche Gegenstand dieses ersten Teils der Untersuchungen.

1. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Nachfolgend ist X immer eine fest gewählte abzählbar-unendliche Grundmenge. Die Menge aller Filter von X wird mit $\mathfrak{F}$, die Menge aller Ultrafilter von X mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Ist M eine Teilmenge von X, so heißt $\overset{\frown}{M} = \{A\colon M \subset A \subset X\}$ der von M erzeugte Hauptfilter. Hierbei wird auch $M = \emptyset$ zugelassen: Der Nullfilter $\mathfrak{o} = \overset{\frown}{\emptyset}$ besteht aus allen Teilmengen von X.

Hinsichtlich der zur mengentheoretischen Inklusion dualen Ordnung

$$\mathfrak{a} \le \mathfrak{b} :\leftrightarrow \mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \mathfrak{F})$$

ist $\mathfrak{F}$ ein vollständiger Verband mit $\mathfrak{o}$ als feinstem und $\overset{\frown}{X}$ als gröbstem Filter. Der Vereinigungsfilter $\bigvee\{\mathfrak{a}_\iota\colon \iota \in I\}$ eines beliebigen Filtersystems besteht bei dieser Ordnung gerade aus den Mengen der Form $\bigcup\{A_\iota\colon \iota \in I\}$ mit $A_\iota \in \mathfrak{a}_\iota$ $(\iota \in I)$, der Durchschnittsfilter $\bigwedge\{\mathfrak{a}_\iota\colon \iota \in I\}$ hingegen nur aus den endlichen Durchschnitten $A_{\iota_1} \cap \ldots \cap A_{\iota_n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\iota_1, \ldots, \iota_n \in I$ und mit $A_{\iota_1} \in \mathfrak{a}_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n} \in \mathfrak{a}_{\iota_n}$.

* Prof. em. Dr. H.-J. Kowalsky · Am Schiefen Berge 20 · 3340 Wolfenbüttel

Der Filterverband ist ein atomarer Verband: Atome von $\mathfrak{F}$ sind genau die Ultrafilter, und jeder Filter $\neq \mathfrak{o}$ ist Vereinigungsfilter von Ultrafiltern. Spezielle Ultrafilter sind die gebundenen Ultrafilter $\widehat{\{x\}}$ (kürzer mit $\hat{x}$ bezeichnet), die von einer einpunktigen Menge erzeugt werden. Ultrafilter, die nicht in diesem Sinn an einen Punkt gebunden sind, werden freie Ultrafilter genannt.

Definition: *Eine Menge* $\{\mathfrak{u}_\iota : \iota \in I\}$ *von Ultrafiltern heißt disjunkt, wenn es Mengen* $U_\iota \in \mathfrak{u}_\iota$ $(\iota \in I)$ *gibt, die paarweise punktfremd sind.*

Jede endliche Menge von Ultrafiltern ist disjunkt. Umgekehrt kann eine disjunkte Menge von Ultrafiltern wegen der Abzählbarkeit von X selbst höchstens abzählbar sein.

1.1 *Eine Menge* $\{\mathfrak{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *von Ultrafiltern ist genau dann disjunkt, wenn für je zwei Teilmengen* A *und* B *von* $\mathbb{N}$ *aus* $A \cap B = \emptyset$ *auch*

$$\bigvee_{m \in A} \mathfrak{u}_m \vee \bigvee_{n \in B} \mathfrak{u}_n = \mathfrak{o} \tag{1}$$

folgt.

Beweis: Die Ultrafiltermenge sei disjunkt. Dann gibt es paarweise punktfremde Mengen $U_n \in \mathfrak{u}_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es folgt

$$U' = \bigcup_{m \in A} U_m \in \bigvee_{m \in A} \mathfrak{u}_m, \quad U'' = \bigcup_{n \in B} U_n \in \bigvee_{n \in B} \mathfrak{u}_n$$

und $U' \cap U'' = \emptyset$, also (1). Umgekehrt sei jetzt (1) vorausgesetzt und außerdem, daß für $\nu < n$ bereits paarweise punktfremde Mengen $U_\nu \in \mathfrak{u}_\nu$ mit $X' = X \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_{n-1}) \in \bigvee \{\mathfrak{u}_\mu : \mu \geq n\}$ konstruiert sind. Zu $A = \{n\}$, $B = \{\mu : \mu > n\}$ und zu X' als neuer Grundmenge gibt es dann wegen (1) ein $U_n \in \mathfrak{u}_n$ mit $U_n \subset X'$ und $X' \setminus U_n \in \bigvee \{\mathfrak{u}_\mu : \mu > n\}$. Damit sind paarweise punktfremde Mengen $U_n \in \mathfrak{u}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ induktiv konstruiert, die Menge von Ultrafiltern ist also disjunkt. ●

Der folgende Begriff wird zwar erst etwas später gebraucht, knüpft aber an den gerade behandelten Sachverhalt an.

Definition: *Eine Abbildung* $\alpha : X \to \mathfrak{A}$ *soll stark injektiv genannt werden, wenn die Bildmenge* $\{\alpha x : x \in X\}$ *eine disjunkte Menge von Ultrafiltern ist.*

Offenbar ist jede stark injektive Abbildung auch injektiv.

1.2 *Es sei* I *eine unendliche Indexmenge,* $\{\mathfrak{u}_\iota : \iota \in I\}$ *sei ein System paarweise verschiedener Ultrafilter von* X, *und* $\mathfrak{v}^*$ *sei ein Ultrafilter der Indexmenge* I. *Dann ist*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \bigvee_{\iota \in V^*} \mathfrak{u}_\iota$$

wieder ein Ultrafilter von X.

Beweis: Jedenfalls ist $\mathfrak{w}$ ein Filter. Zum Nachweis der Ultrafiltereigenschaft sei M eine beliebige Teilmenge von X. Sie bestimmt die Teilmenge $M^* = \{\iota : M \in \mathfrak{u}_\iota\}$ von I.

Da $\mathfrak{v}^*$ ein Ultrafilter von I ist, gilt $M^* \in \mathfrak{v}^*$ oder $I\setminus M^* \in \mathfrak{v}^*$. Im ersten Fall folgt $M \in \bigvee\{\mathfrak{u}_\iota: \iota \in M^*\}$ und daher $M \in \mathfrak{w}$. Im zweiten Fall ergibt sich wegen

$$I\setminus M^* = \{\iota: M \notin \mathfrak{u}_\iota\} = \{\iota: X\setminus M \in \mathfrak{u}_\iota\}$$

mit dem entsprechenden Schluß $X\setminus M \in \mathfrak{w}$. •

Besonderes Interesse besitzt der Fall, daß I selbst abzählbar ist. Dann gibt es eine Bijektion $\eta: X \to I$, und $\mathfrak{v} = \{\eta^{-1}V^*: V^* \in \mathfrak{v}^*\}$ ist ein Ultrafilter von X. Schließlich wird durch $\alpha = \mathfrak{u}_{\eta x}$ eine Injektion $\alpha: X \to \mathfrak{A}$ definiert. Der Ultrafilter $\mathfrak{w}$ aus 1.2 soll bei dieser Situation mit $\langle \mathfrak{v},\alpha \rangle$ bezeichnet werden.

Definition: $\langle \mathfrak{v},\alpha \rangle = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \alpha x$

mit $\mathfrak{v} \in \mathfrak{A}$ *und einer Injektion* $\alpha: X \to \mathfrak{A}$.

Der Ultrafilter $\langle \mathfrak{v},\alpha \rangle$ wird von den Mengen der Form $\bigcup\{U_x: x \in V\}$ mit $V \in \mathfrak{v}$ und Mengen $U_x \in \alpha x$ $(x \in V)$ erzeugt. Der Filter $\mathfrak{w}$ aus 1.2 bestimmt aber $\mathfrak{v}$ und α nicht eindeutig: $\mathfrak{v}$ und α hängen ja außer von $\mathfrak{w}$ auch noch von der Wahl der Bijektion η ab. Der folgende Satz zeigt, daß der in der letzten Definition beschriebene Bildungsprozeß von Ultrafiltern bei Iteration eine gewisse Assoziativitätseigenschaft besitzt, wenn man bei den beteiligten Abbildungen $X \to \mathfrak{A}$ statt Injektivität sogar starke Injektivität voraussetzt.

1.3 *Es sei* $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter von* X, *und die Abbildungen* $\alpha,\beta: X \to \mathfrak{A}$ *seien stark injektiv. Dann wird durch* $\gamma x = \langle \alpha x,\beta \rangle$ *eine ebenfalls stark injektive Abbildung* $\gamma: X \to \mathfrak{A}$ *definiert, und es ist*

$$\langle \langle \mathfrak{u},\alpha \rangle,\beta \rangle = \langle \mathfrak{u},\gamma \rangle.$$

Beweis: Zunächst wird die starke Injektivität von γ nachgewiesen. Dazu seien A und B punktfremde Teilmengen von X. Weil α stark injektiv ist, gibt es punktfremde Mengen A',B' mit $A' \in \alpha x$ für alle $x \in A$ und mit $B' \in \alpha y$ für alle $y \in B$. Und weil auch β stark injektiv ist, gibt es zu A',B' ebenfalls punktfremde Mengen A'',B'' mit $A'' \in \beta x'$ für alle $x' \in A'$ und mit $B'' \in \beta y'$ für alle $y' \in B'$. Es folgt $A'' \in \langle \alpha x,\beta \rangle$ für alle $x \in A$ und $B'' \in \langle \alpha y,\beta \rangle$ für alle $y \in B$, also

$$A'' \in \bigvee\{\langle \alpha x,\beta \rangle: x \in A\} \quad \textit{und} \quad B'' \in \bigvee\{\langle \alpha y,\beta \rangle: y \in B\},$$

wegen $A'' \cap B'' = \emptyset$ somit die starke Injektivität von γ.

Eine Basis von $\mathfrak{v} = \langle \mathfrak{u},\alpha \rangle$ bilden die Mengen der Form

$$V = \bigcup_{x \in U} V_x \quad \textit{mit einem } U \in \mathfrak{u} \textit{ und Mengen } V_x \in \alpha x.$$

Entsprechend bilden folgende Mengen eine Basis von $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v},\beta \rangle = \langle \langle \mathfrak{u},\alpha \rangle,\beta \rangle$:

$$W = \bigcup\{W_y: y \in \bigcup_{x \in U} V_x\} \quad \textit{mit } U \in \mathfrak{u},\ V_x \in \alpha x \textit{ und } W_y \in \beta y. \tag{2}$$

Eine Basis von γx besteht aus Mengen der Form

$$W_x^* = \bigcup_{y \in V_x^*} W_{x,y}^* \quad \textit{mit } V_x^* \in \alpha x \textit{ und } W_{x,y}^* \in \beta y.$$

Daher bilden die Mengen

$$W^* = \bigcup_{x \in U^*} W^*_x = \bigcup_{x \in U^*} \bigcup_{y \in V^*_x} W^*_{x,y} \quad \textit{mit } U^* \in \mathfrak{u},\ V^*_x \in \alpha x \textit{ und } W^*_{x,y} \in \beta y \qquad (3)$$

eine Basis von $\langle \mathfrak{u}, \gamma \rangle$. Bei gegebenem W in (2) wähle man in (3) speziell $U^* = U$, $V^*_x = V_x$ und $W^*_{x,y} = W_y$. Dann folgt $W^* = W$. Umgekehrt sei W^* in (3) gegeben. In (2) wähle man dann $U = U^*$ und $V_x = V^*_x$. Ein $y \in \bigcup \{V_x : x \in U\}$ kann in V_x für mehrere Punkte x liegen. Man wähle einen Punkt x' unter diesen Punkten x aus und setze $W_y = W^*_{x',y}$. Es folgt $W \subset W^*$ und damit die behauptete Gleichung. ●

2. Abbildungen

Es sei $\varphi: X \to X$ eine beliebige Abbildung. Ist $\mathfrak{a}$ ein Filter von X, so ist $\{\varphi A : A \in \mathfrak{a}\}$ Basis eines Filters, der der Bildfilter von $\mathfrak{a}$ genannt und mit $\varphi\mathfrak{a}$ bezeichnet werden soll. In diesem Sinn induziert also jede Abbildung $\varphi: X \to X$ eine (der Einfachheit halber ebenso bezeichnete) Filterabbildung $\varphi: \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$. Für sie ergibt sich $\varphi\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$, $\varphi\mathring{M} = \widehat{\varphi M}$, $\varphi(\bigvee \mathfrak{a}_\iota) = \bigvee(\varphi\mathfrak{a}_\iota)$, aber (auch bei endlicher Indexmenge) im allgemeinen nur $\varphi(\bigvee \mathfrak{a}_\iota) \le \bigvee(\varphi\mathfrak{a}_\iota)$. Lediglich bei injektiven Abbildungen gilt auch hier stets das Gleichheitszeichen.

Ist $\mathfrak{u}$ ein Ultrafilter von X, so ist auch $\varphi\mathfrak{u}$ ein Ultrafilter. Für die von $\varphi: X \to X$ induzierte Filterabbildung gilt also $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$.

Definition: *Es sei* $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter, und* $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ *seien Abbildungen* $X \to X$.

φ *heißt injektiv auf* $\mathfrak{u}$, *wenn es eine Filtermenge* $U \in \mathfrak{u}$ *gibt, auf der* φ *injektiv ist.*

φ_1 *und* φ_2 *heißen gleich auf* $\mathfrak{u}$ ($\varphi_1 = \varphi_2 \bmod \mathfrak{u}$), *wenn* φ_1 *und* φ_2 *auf einer Filtermenge* $U \in \mathfrak{u}$ *übereinstimmen.*

Ein bekanntes Ergebnis besagt

2.1 *Ist* $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter und ist* φ *eine Abbildung mit* $\varphi\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$, *dann ist* φ *gleich der Identität auf* $\mathfrak{u}$.

Wie oben bemerkt wurde, sind Abbildungen im allgemeinen nicht mit der Durchschnittsbildung von Filtern vertauschbar. Im Sonderfall der Bildung von Ultrafiltern der Form $\langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ ist dies jedoch möglich.

2.2 *Es sei* $\mathfrak{v}$ *ein Ultrafilter, und* $\alpha: X \to \mathfrak{A}$ *sei (stark) injektiv. Dann gilt für beliebige Abbildungen* $\varphi: X \to X$

$$\varphi\langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \varphi(\alpha x).$$

Ist φ *hierbei injektiv, so ist mit* α *auch* $\varphi \circ \alpha: X \to \mathfrak{A}$ *(stark) injektiv, und es ist*

$$\varphi\langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle = \langle \mathfrak{v}, \varphi \circ \alpha \rangle.$$

Beweis: Der Ultrafilter

$$\langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \alpha x$$

wird, wie im ersten Abschnitt bemerkt, von den Mengen der Form $\bigcup\{U_x : x \in V\}$ mit

$V \in \mathfrak{v}$ und $U_x \in \alpha x$ $(x \in V)$ erzeugt. Daher erzeugen die Mengen

$$\varphi(\bigcup\{U_x : x \in V\}) = \bigcup\{\varphi U_x : x \in V\}$$

den Bildfilter $\varphi\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle$, woraus unmittelbar die erste Behauptung folgt, die auch in der Form

$$\varphi\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle = \bigwedge_{V\in\mathfrak{v}} \bigvee_{x\in V} (\varphi\circ\alpha)x$$

geschrieben werden kann. Daraus folgt aber sofort die zweite Behauptung, wenn $\varphi\circ\alpha$ injektiv ist. Allgemein ist dies jedoch nur gewährleistet, wenn φ eine injektive Abbildung ist. Schließlich sei α sogar stark injektiv. Dann gibt es paarweise punktfremde Mengen $U_x \in \alpha x$ $(x \in X)$, und diese werden durch eine injektive Abbildung φ auch wieder auf paarweise punktfremde Bildmengen abgebildet. Bei injektivem φ ist daher mit α auch $\varphi\circ\alpha$ stark injektiv. ●

Die für Filter erklärte Ordnungsrelation $\leq$ ist für Ultrafilter bedeutungslos, weil bei ihr je zwei verschiedene Ultrafilter unvergleichbar sind. Man kann aber auf $\mathfrak{A}$ in natürlicher Weise mit Hilfe von Abbildungen wenigstens eine Präordnung definieren.

Definition: $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$: $\leftrightarrow$ *Es gibt eine Abbildung* $\varphi: X \to X$ *mit* $\varphi\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ $(\mathfrak{u},\mathfrak{v} \in \mathfrak{A})$.
$\mathfrak{u} \sim \mathfrak{v}$: $\leftrightarrow \mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$ *und* $\mathfrak{v} \blacktriangleleft \mathfrak{u}$.

Wie üblich wird statt $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$ gleichbedeutend auch $\mathfrak{v} \blacktriangleright \mathfrak{u}$ geschrieben. Die Relation $\blacktriangleleft$ ist reflexiv und transitiv, also eine Präordnung auf $\mathfrak{A}$ mit der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$. Die von $\mathfrak{u}$ erzeugte Äquivalenzklasse soll mit $\hat{\mathfrak{u}}$ bezeichnet werden. Auf der Menge $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\!\sim$ induziert $\blacktriangleleft$ dann eine (ebenso bezeichnete) Ordnungsrelation. Die geordnete Menge $\hat{\mathfrak{A}}$ besitzt ein minimales Element, nämlich diejenige Klasse, die genau aus den gebundenen Ultrafiltern besteht.

Aus $\mathfrak{u} \sim \mathfrak{v}$ folgt die Existenz von Abbildungen φ,ψ mit $\varphi\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ und $\psi\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$. Wegen $(\psi\circ\varphi)\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$ und $(\varphi\circ\psi)\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ ist dann nach 2.1 einerseits $\psi\circ\varphi = \mathrm{id} \bmod \mathfrak{v}$ und ebenso $\varphi\circ\psi = \mathrm{id} \bmod \mathfrak{u}$. Daher bildet φ eine Filtermenge $V \in \mathfrak{v}$ bijektiv auf eine Menge $U \in \mathfrak{u}$ ab mit der Umkehrabbildung ψ.

2.3 *Es seien* $\mathfrak{v},\mathfrak{v}'$ *Ultrafilter, und* ψ *sei eine Abbildung mit* $\psi\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'$ *(d.h.* $\mathfrak{v} \blacktriangleright \mathfrak{v}'$*). Ferner sei* $\alpha: X \to \mathfrak{A}$ *stark injektiv,* $\alpha': X \to \mathfrak{A}$ *sei injektiv, und für alle* x *aus einer Menge* $V \in \mathfrak{v}$ *sei* $\alpha x \blacktriangleright \alpha'(\psi x)$ *erfüllt. Dann gilt auch*

$$\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle \blacktriangleright \langle\mathfrak{v}',\alpha'\rangle.$$

Beweis: Da α stark injektiv ist, gibt es paarweise punktfremde Mengen $U_x \in \alpha x$ $(x \in X)$. Wegen $\alpha x \blacktriangleright \alpha'(\psi x)$ gibt es weiter Abbildungen $\varphi_x: U_x \to X$ mit $\varphi_x(\alpha x) = \alpha'(\psi x)$. Weil die (eingeschränkten) Definitionsbereiche der Abbildungen φ_x paarweise punktfremd sind, wird auf $U = \bigcup\{U_x : x \in X\}$ durch $\varphi z = \varphi_x z$ für $z \in U_x$ eine Abbildung $\varphi: U \to X$ mit $\varphi(\alpha x) = \varphi_x(\alpha x) = \alpha'(\psi x)$ definiert. Wegen 2.2 ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\varphi\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle &= \bigwedge_{V\in\mathfrak{v}} \bigvee_{x\in V} \varphi(\alpha x) = \bigwedge_{V\in\mathfrak{v}} \bigvee_{x\in V} \alpha'(\psi x)\\ &= \bigwedge_{V\in\mathfrak{v}} \bigvee_{y\in\psi V} \alpha' y = \bigwedge_{V'\in\mathfrak{v}'} \bigvee_{y\in V'} \alpha' y = \langle\mathfrak{v}',\alpha'\rangle\end{aligned}$$

und damit $\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle \blacktriangleright \langle\mathfrak{v}',\alpha'\rangle$. ●

Der soeben bewiesene Satz beschreibt jedoch keine Klasseneigenschaft, weil die die Relation $\mathfrak{v} \blacktriangleright \mathfrak{v}'$ bewirkende Abbildung ψ explizit in die Voraussetzungen eingeht.

Aus Symmetriegründen ergibt sich der folgende Satz nach dem soeben gewonnenen Ergebnis.

2.4 *Es seien $\mathfrak{v},\mathfrak{v}'$ Ultrafilter, und ψ sei eine auf $\mathfrak{v}$ injektive Abbildung mit $\psi\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'$ (also $\mathfrak{v} \sim \mathfrak{v}'$). Ferner seien α,α': $X \to \mathfrak{A}$ stark injektive Abbildungen, und für alle* x *aus einer Menge* $V \in \mathfrak{v}$ *sei* $\alpha x \sim \alpha'(\psi x)$ *erfüllt. Dann gilt auch*

$$\langle \mathfrak{v},\alpha \rangle \sim \langle \mathfrak{v}',\alpha' \rangle .$$

Eine Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen nicht möglich, wohl aber bei geeigneten Einschränkungen der Wertbereiche von α und α', wie sich später (4.2) zeigen wird.

3. Primitive Ultrafilter

Die durch $\blacktriangleleft$ geordnete Menge $\hat{\mathfrak{A}}$ besitzt, wie oben bemerkt, ein kleinstes Element, nämlich die aus den gebundenen Ultrafiltern bestehende Klasse. $\hat{\mathfrak{A}}$ besitzt aber auch Atome, also obere Nachbarn der kleinsten Klasse. Diese Atome werden von Ultrafiltern eines bekannten Typs erzeugt.

Definition: *Ein Ultrafilter $\mathfrak{p}$ von X heißt primitiv, wenn er ein freier Ultrafilter ist und wenn für jede Abbildung φ: $X \to X$ eine der beiden folgenden Eigenschaften erfüllt ist:*

(1) *φ ist injektiv auf $\mathfrak{p}$ (also $\varphi\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p}$).*

(2) *$\varphi\mathfrak{p}$ ist ein gebundener Ultrafilter (also $\varphi\mathfrak{p} = \hat{x}$ mit einem $x \in X$).*

Hiernach sind die primitiven Ultrafilter hinsichtlich der Präordnung $\blacktriangleleft$ von $\mathfrak{A}$ genau die oberen Nachbarn gebundener Ultrafilter. Der folgende Satz zeigt, daß die von primitiven Ultrafiltern erzeugten Äquivalenzklassen auch nur aus primitiven Ultrafiltern bestehen, so daß also die Atome von $\hat{\mathfrak{A}}$ genau die Äquivalenzklassen primitiver Ultrafilter sind.

3.1 *Es sei $\mathfrak{p}$ ein primitiver Ultrafilter, und für den Ultrafilter $\mathfrak{q}$ gelte $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$. Dann ist auch $\mathfrak{q}$ ein primitiver Ultrafilter.*

Beweis: Wegen $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$ gibt es Mengen $P \in \mathfrak{p}$, $Q \in \mathfrak{q}$ und eine Bijektion ψ: $P \to Q$ mit $\psi\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Daher ist $\mathfrak{q}$ jedenfalls wie $\mathfrak{p}$ ein freier Ultrafilter. Weiter sei φ: $X \to X$ eine beliebige Abbildung. Dann gilt $\varphi\mathfrak{q} = (\varphi \circ \psi)\,\mathfrak{p}$, und, weil $\mathfrak{p}$ ein primitiver Ultrafilter ist, muß $\varphi \circ \psi$ auf $\mathfrak{p}$ injektiv sein, oder es gilt $(\varphi \circ \psi)\,\mathfrak{p} = \hat{x}$ mit einem $x \in X$. Im ersten Fall folgt, daß φ auf $\psi\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ injektiv ist. Im zweiten Fall ergibt sich analog $\varphi\mathfrak{q} = (\varphi \circ \psi)\,\mathfrak{p} = \hat{x}$. Daher ist auch $\mathfrak{q}$ ein primitiver Ultrafilter. ●

Die Menge aller primitiven Ultrafilter von X soll mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden. Bekannt ist, daß es in $\mathfrak{P}$ überabzählbar viele paarweise inäquivalente Ultrafilter gibt. $\hat{\mathfrak{A}}$ besitzt daher ebenfalls überabzählbar viele Atome. Bekannt ist weiter, daß primitive Ultrafilter auch mit Hilfe von Zerlegungen gekennzeichnet werden können. Unter einer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von X soll immer ein System nicht leerer, paarweise punktfremder Mengen mit $\bigcup \{Z\colon Z \in \mathfrak{Z}\} = X$ verstanden werden.

3.2 *Ein freier Ultrafilter* $\mathfrak{p}$ *ist genau dann primitiv, wenn für jede Zerlegung* $\mathfrak{Z}$ *von* X *eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*
(a) *Es gibt eine Menge* $P \in \mathfrak{p}$ *mit* $|P \cap Z| \leq 1$ *für alle* $Z \in \mathfrak{Z}$.
(b) *Es gibt ein* $Z \in \mathfrak{Z}$ *mit* $Z \in \mathfrak{p}$.

Beweis: Die Mengen einer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ können mit Punkten aus X indiziert werden, so daß $\mathfrak{Z} = \{Z_x\colon x \in M\}$ mit einer Teilmenge M von X gilt. Durch $\varphi y = x$ für $y \in Z_x$ wird dann eine Abbildung $\varphi\colon X \to X$ mit $Im\,\varphi = M$ und mit $\varphi^{-}\{x\} = Z_x$ für $x \in M$ definiert. Umgekehrt bestimmt jede Abbildung $\varphi\colon X \to X$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{Z_x\colon x \in Im\,\varphi\}$ mit $Z_x = \varphi^{-}\{x\}$. Bei dieser Entsprechung zwischen Zerlegungen und Abbildungen ist (a) mit der Eigenschaft (1) aus der Definition gleichwertig, und (b) ist gleichwertig mit (2). •

Eine wichtige Eigenschaft primitiver Ultraftilter bezieht sich auf abzählbare Teilmengen von $\mathfrak{P}$.

3.3 *Jede abzählbare Menge* $\{\mathfrak{p}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *primitiver Ultrafilter ist disjunkt: Es gibt eine Zerlegung* $\{Z_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *von* X *mit* $Z_n \in \mathfrak{p}_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Anschließend wird der folgende Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz: *Es gibt ein* $P_0 \in \mathfrak{p}_0$ *mit* $X \backslash P_0 \in \mathfrak{p}_n$ *für alle* $n \geq 1$.

Mit seiner Hilfe ergibt sich dann die Behauptung des Satzes folgendermaßen durch Induktion.

Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien bereits paarweise punktfremde Mengen $P_0 \in \mathfrak{p}_0, \ldots, P_n \in \mathfrak{p}_n$ so konstruiert, daß $X' = X \backslash (P_0 \cup \ldots \cup P_n) \in \mathfrak{p}_\nu$ für alle $\nu > n$ erfüllt ist. Induktionsbeginn ist dabei der Hilfssatz. Wendet man nun den Hilfssatz auf X' als neue Grundmenge und auf die Menge $\{\mathfrak{p}_\nu\colon \nu > n\}$ von Filtern sinngemäß an, so folgt die Existenz einer Menge $P_{n+1} \in \mathfrak{p}_{n+1}$ mit $P_{n+1} \subset X'$, also mit $P_{n+1} \cap (P_0 \cup \ldots \cup P_n) = \emptyset$, und mit $X \backslash (P_0 \cup \ldots \cup P_{n+1}) = X' \backslash P_{n+1} \in \mathfrak{p}_\nu$ für alle $\nu > n+1$. Die so konstruierten Mengen P_n bilden bereits eine Zerlegung der behaupteten Art, allerdings im allgemeinen nur von einer Teilmenge von X. Setzt man nun $Z_n = P_n$ für $n \geq 1$ und $Z_0 = X \backslash \bigcup \{Z_n\colon n \geq 1\}$, so erfüllt $\mathfrak{Z} = \{Z_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ die Behauptung des Satzes.

Beweis des Hilfssatzes: Für $n \geq 1$ werden Mengensysteme $\mathfrak{S}_n$ mit $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{n+1}$ und mit folgenden Eigenschaften induktiv definiert:
(a) $\mathfrak{S}_n$ ist ein endliches System nicht leerer, paarweise punktfremder Mengen.
(b) $\bigcup \{S\colon S \in \mathfrak{S}_n\} \in \mathfrak{p}_\nu$ für $1 \leq \nu \leq n$.
(c) $X \backslash \bigcup \{S\colon S \in \mathfrak{S}_n\} \in \mathfrak{p}_0$.

Wegen $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_0$ gibt es eine Menge $S_1 \in \mathfrak{p}_1$ mit $X \backslash S_1 \in \mathfrak{p}_0$. Dann sei $\mathfrak{S}_1 = \{S_1\}$. Offensichtlich sind (a)−(c) erfüllt.

Es seien nun $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ entsprechend konstruiert. Da $\mathfrak{p}_{n+1}$ ein Ultrafilter ist, gilt

$$\bigcup \{S\colon S \in \mathfrak{S}_n\} \in \mathfrak{p}_{n+1} \quad \textit{oder aber} \quad X \backslash \bigcup \{S\colon S \in \mathfrak{S}_n\} \in \mathfrak{p}_{n+1}.$$

Im ersten Fall sei $\mathfrak{S}_{n+1} = \mathfrak{S}_n$. Dann gelten (a)–(c) auch für $\mathfrak{S}_{n+1}$. Im zweiten Fall gibt es wegen $\mathfrak{p}_{n+1} \neq \mathfrak{p}_0$ ein $S_{n+1} \in \mathfrak{p}_{n+1}$ mit $S_{n+1} \subset X \setminus \bigcup \{S: S \in \mathfrak{S}_n\}$ und $X \setminus S_{n+1} \in \mathfrak{p}_0$. Dann sei $\mathfrak{S}_{n+1} = \mathfrak{S}_n \cup \{S_{n+1}\}$, und auch hier sind wieder (a)–(c) erfüllt.

Wenn nun die so konstruierte Folge $(\mathfrak{S}_n)_{n \geq 1}$ stationär ist, wenn also $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{n_0}$ für $n \geq n_0$ mit einem geeigneten n_0 gilt, dann ist wegen (c)

$$P_0 = X \setminus \bigcup \{S: S \in \mathfrak{S}_{n_0}\}$$

eine Filtermenge aus $\mathfrak{p}_0$ der im Hilfssatz behaupteten Art.

Wenn andernfalls $(\mathfrak{S}_n)_{n \geq 1}$ nicht stationär ist, dann erhält man mit $S^* = X \setminus \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{S \in \mathfrak{S}_n} S$ folgende Zerlegung $\mathfrak{S}$ von X:

$$\mathfrak{S} = \begin{cases} \bigcup \{\mathfrak{S}_n : n \geq 1\} & \textit{wenn} \quad S^* = \emptyset \\ \bigcup \{\mathfrak{S}_n : n \geq 1\} \cup \{S^*\} & \quad S^* \neq \emptyset. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{p}_0$ primitiv ist, tritt einer der beiden folgenden Fälle ein.

Fall 1: *Es gibt ein* $P_0 \in \mathfrak{p}_0$ *mit* $|P_0 \cap S| \leq 1$ *für alle* $S \in \mathfrak{S}$.

Wegen (a) und (b) ist für $n \geq 1$ die Menge $P_n' = \bigcup \{S: S \in \mathfrak{S}\} \setminus P_0$ eine Filtermenge aus $\mathfrak{p}_n$ mit $P_n' \cap P_0 = \emptyset$; d.h. P_0 erfüllt die Behauptung des Hilfssatzes.

Fall 2: *Es gibt ein* $S \in \mathfrak{S}$ *mit* $S \in \mathfrak{p}_0$.

Aus $S \in \mathfrak{S}_n$ für ein geeignetes n folgt ein Widerspruch zur Eigenschaft (c) von $\mathfrak{S}_n$. Daher muß $S = S^* \neq \emptyset$ erfüllt sein, und $P_0 = S^*$ ist eine Filtermenge aus $\mathfrak{p}_0$ wieder der im Hilfssatz behaupteten Art. ●

Primitive Ultrafilter sind zwar obere Nachbarn der gebundenen Ultrafilter hinsichtlich der Präordnung ◄. Es gibt aber auch echt fallende unendliche Ultrafilterfolgen, die gegen gebundene Ultrafilter konvergieren, die primitiven Ultrafilter also vermeiden.

Definition: *Es sei* $(\mathfrak{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Ultrafilterfolge, und für jedes* n *sei* φ_n *eine Abbildung mit* $\varphi_n \mathfrak{u}_n = \mathfrak{u}_{n+1}$, *die auf* $\mathfrak{u}_n$ *nicht injektiv ist. Dann soll ein Ultrafilter* $\mathfrak{u}$ *Limes dieser Folge genannt werden, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) *Es gibt Abbildungen* ψ_n *mit* $\psi_n \mathfrak{u}_n = \mathfrak{u}$ *und mit* $\psi_n = \psi_{n+1} \circ \varphi_n$ $(n \in \mathbb{N})$.
(2) *Ist* $\mathfrak{u}^*$ *ein Ultrafilter mit Abbildungen* ψ_n^*, *die ebenfalls* $\psi_n^* \mathfrak{u}_n = \mathfrak{u}^*$ *und* $\psi_n^* = \psi_{n+1}^* \circ \varphi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *erfüllen, dann gibt es eine Abbildung* χ *mit* $\chi \mathfrak{u} = \mathfrak{u}^*$ *und* $\psi_n^* = \chi \circ \psi_n$ mod $\mathfrak{u}_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

3.4 *Zu jeder Ultrafilterfolge* $(\mathfrak{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *und Abbildungen* φ_n *mit* $\varphi_n \mathfrak{u}_n = \mathfrak{u}_{n+1}$ *gibt es einen bis auf Äquivalenz eindeutigen Limes.*

Beweis: Für alle n sei $\varphi_n' = \varphi_n \circ \ldots \circ \varphi_0$. Durch

$$x \equiv y : \leftrightarrow \textit{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \textit{ mit } \varphi_n' x = \varphi_n' y$$

wird in X eine Äquivalenzrelation definiert: Reflexivität und Symmetrie ergeben sich unmittelbar. Die Transitivität folgt daraus, daß mit $\varphi_n' x = \varphi_n' y$ auch $\varphi_\nu' x = \varphi_\nu' y$ für alle $\nu > n$ gilt. Bei fester Wahl von Repräsentanten der Äquivalenzklassen kann die Quotientenmenge $\bar{X} = X/\equiv$ in X eingebettet werden, so daß die kanonische Abbildung $\psi\colon X \to \bar{X}$ im Sinn dieser Einbettung gleich als Abbildung $\psi\colon X \to X$ aufgefaßt werden soll. Dann sei $u = \psi u_0$.

$$
\begin{tikzcd}
 & u_0 \arrow[ddddl, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi_0"] \arrow[ddddr, "\psi_0^*"] & \\
 & u_1 \arrow[dddl, "\psi_1"'] \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[dddr, "\psi_1^*"] & \\
 & u_2 \arrow[ddl, "\psi_2"'] \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[ddr, "\psi_2^*"] & \\
 & \vdots & \\
u \arrow[rr, "\chi"'] & & u^*
\end{tikzcd}
$$

Da bei festem n aus $\varphi_n' x = \varphi_n' y$ auch $\psi x = \psi y$ folgt, kann ψ in der Form $\psi = \psi_n \circ \varphi_n'$ faktorisiert werden, und die damit definierten Abbildungen ψ_n erfüllen offenbar Eigenschaft (1) der Definition.

Aus $\psi x = \psi y$, also $x \equiv y$, folgt zunächst $\varphi_n' x = \varphi_n' y$ für ein geeignetes n und damit weiter

$$\psi_0^* x = (\psi_n^* \circ \varphi_n')x = (\psi_n^* \circ \varphi_n')y = \psi_0^* y.$$

Daher gestattet ψ_0^* eine Faktorisierung $\psi_0^* = \chi \circ \psi$, und es folgt

$$\chi u = (\chi \circ \psi)u_0 = \psi_0^* u_0 = u^* \quad \textit{sowie}$$
$$\psi_n^* u_n = u^* = \chi u = (\chi \circ \psi_n)u_n.$$

Damit ist auch Eigenschaft (2) erfüllt. Nach ihr müssen sich zwei Limites derselben Folge wechselseitig auf einander abbilden lassen, müssen also äquivalent sein. •

Zur Konstruktion eines Beispiels sei $X = \mathbb{N}$. Jedes $x \in X$ mit $x > 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$x = 2^{e(x)}(1 + 2 \cdot f_0(x)).$$

Es sei dann

$$f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x)) \ (n > 0, x > 0) \ \textit{und} \ f_n(0) = 0 \ (n \geq 0).$$

Bei festem n bilden die Mengen

$$Z_k^{(n)} = \{x\colon f_n(x) = k\}$$

eine Zerlegung $\mathfrak{Z}^{(n)} = \{Z_k^{(n)}\colon k \in \mathbb{N}\}$ von X. Die so erhaltene Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt folgende Eigenschaften:

(a) $|Z_k^{(n)}| =$ ist abzählbar-unendlich *(*$n, k \in \mathbb{N}$*)*.
(b) $\mathfrak{Z}^{(n+1)}$ *ist Vergrößerung von* $\mathfrak{Z}^{(n)}$*: Zu jedem* $k \in \mathbb{N}$ *gibt es ein* $l \in \mathbb{N}$ *mit* $Z_k^{(n)} \subset Z_l^{(n+1)}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*)*.

(c) *Für alle* $n, l \in \mathbb{N}$ *ist* $|\{k\colon Z_k^{(n)} \subset Z_l^{(n+1)}\}| =$ abzählbar-unendlich.
(d) *Für alle* $x, y \in X$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $x \in Z_0^{(n)}$ *und* $y \in Z_0^{(n)}$.

Die Eigenschaften (a)–(c) ergeben sich leicht aus der Definition der Zerlegungen. Da bei fesftem $x \in X$ die Folge der Zahlen $f_n(x)$ strikt abnimmt, so lange $f_n(x) > 0$ gilt, gibt es ein n_0 mit $f_\nu(x) = 0$ für alle $\nu \geq n_0$. Daraus folgt unmittelbar (d).

Mit Hilfe der so gewonnenen Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}^{(n)})$ wird nun zunächst eine Filterbasis konstruiert.

$$\mathfrak{B}^{(n)} = \{X \setminus \bigcup_{k \in \Sigma} Z_k^{(n)}\colon \Sigma \subset \mathbb{N} \textit{ und für alle } l \in \mathbb{N} \textit{ gibt es höchstens endlich viele } k \in \Sigma \textit{ mit } Z_k^{(n)} \subset Z_l^{(n+1)}\},$$

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}^{(n)}.$$

Der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathfrak{B}^{(n)}$ gehört wieder zu $\mathfrak{B}^{(n)}$. Weiter enthält jede Menge aus $\mathfrak{B}^{(n)}$ für $m > n$ wegen (b) auch eine Menge aus $\mathfrak{B}^{(m)}$. Zusammen folgt hieraus, daß $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis für einen Filter $\mathfrak{a}$ ist, der allerdings kein Ultrafilter ist.

Wegen (c) sind die Mengen aus $\mathfrak{B}$ nicht leer. Daher gilt $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, und es gibt einen Ultrafilter $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}$.

Durch $\varphi_n'(x) = k$ für $x \in Z_k^{(n)}$ wird eine Abbildung $\varphi_n'\colon X \to X$ definiert, und $\mathfrak{u}_n = \varphi_n'\mathfrak{u}$ ist ein Ultrafilter von X. Wegen (b) kann φ_{n+1}' in der Form $\varphi_{n+1}' = \varphi_n \circ \varphi_n'$ faktorisiert werden. Es folgt $\mathfrak{u}_{n+1} = \varphi_n \mathfrak{u}_n$.

Wäre $\mathfrak{u}_n$ ein gebundener Ultrafilter, müßte $Z_{k_0}^{(n)} \in \mathfrak{u}$ mit einem geeigneten k_0 gelten. Wegen

$$X \setminus Z_{k_0}^{(n)} = X \setminus \bigcup_{k \in \{k_0\}} Z_k^{(n)} \in \mathfrak{a}$$

gilt aber im Widerspruch hierzu erst recht $X \setminus Z_{k_0}^{(n)} \in \mathfrak{u}$. Also ist $(\mathfrak{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Folge freier Ultralfilter.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathfrak{u} \arrow[dlll, "\varphi_0'"'] \arrow[dll, "\varphi_1'"] \arrow[dr, "\varphi_n'"'] \arrow[drr, "\varphi_{n+1}'"] & & & \\
\mathfrak{u}_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & \mathfrak{u}_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] & \cdots \arrow[rr] & & \mathfrak{u}_n \arrow[r, "\varphi_n"'] & \mathfrak{u}_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Es soll jetzt die Annahme, daß φ_n auf $\mathfrak{u}_n$ injektiv ist, zum Widerspruch geführt werden. Aus der Annahme folgt die Existenz einer Menge $U_n \in \mathfrak{u}_n$, auf der φ_n injektiv ist. Zu U_n gibt es ein $U \in \mathfrak{u}$ mit $U_n = \varphi_n' U$. Die Wirkung von φ_n auf U_n erfolgt nun so: Zu $k \in U_n$ gibt es ein $x \in U$ mit $x \in Z_k^{(n)}$, so daß $k = \varphi_n' x$ gilt. Zu k existiert eindeutig ein l mit $Z_k^{(n)} \subset Z_l^{(n+1)}$, und es ist dann $\varphi_n k = l$. Die Injektivität von φ_n auf U_n besagt daher, daß für alle l die Bedingung $U \cap Z_k^{(n)} \neq \emptyset$ für höchstens ein k mit $Z_k^{(n)} \subset Z_l^{(n+1)}$ erfüllt sein kann. Diese zu Werten l gehörenden k bilden aber eine Menge Σ der in der Definition von $\mathfrak{B}^{(n)}$

geforderten Art, so daß $A = X \setminus \bigcup_{k \in \Sigma} Z_k^{(n)}$ eine Menge aus $\mathfrak{a}$ ist; erst recht gilt also $A \in \mathfrak{u}$. Im Widerspruch dazu ist aber $U \subset \bigcup_{k \in \Sigma} Z_k^{(n)}$, was $U \cap A = \emptyset$ und damit den Widerspruch $\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ zur Folge hat.

Schließlich besagt (d), daß die Ultrafilterfolge $(\mathfrak{u}_n)$ hinsichtlich der zugehörigen Abbildungsfolge (φ_n) gegen den gebundenen Ultrafilter $\widehat{0}$ konvergiert.

4. Abzählbar-primitive Ultrafilter

Gegeben sei ein freier Ultrafilter $\mathfrak{w}$ von X. Eine beliebige Filtermenge $W \in \mathfrak{w}$ ist dann abzählbar unendlich. In W, aufgefaßt als neue Grundmenge, gibt es daher primitive Ultrafilter, so daß die Menge

$$A_W^* = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \mathfrak{P} \wedge W \in \mathfrak{p}\}$$

nicht leer ist. Unmittelbar ergibt sich $A_{W_1}^* \cap A_{W_2}^* = A_{W_1 \cap W_2}^*$. Damit ist $\{A_W^* : W \in \mathfrak{w}\}$ Basis eines Filters $\mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{o}$ von $\mathfrak{P}$. Aus der Definition von A_W^* folgt unmittelbar $W \in \bigvee \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in A_W^*\}$ und daher

$$\mathfrak{o} \neq \bigwedge_{A^* \in \mathfrak{a}^*} \bigvee_{\mathfrak{p} \in A^*} \mathfrak{p} = \bigwedge_{W \in \mathfrak{w}} \bigvee_{\mathfrak{p} \in A_W^*} \mathfrak{p} \leq \mathfrak{w}.$$

Da aber $\mathfrak{w}$ als Ultrafilter vorausgesetzt wurde, gilt rechts sogar das Gleichheitszeichen. Im allgemeinen ist $\mathfrak{a}^*$ allerdings kein Ultrafilter von $\mathfrak{P}$. Verfeinert man jedoch $\mathfrak{a}^*$ zu einem Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ von $\mathfrak{P}$, so ergibt sich wieder

$$\mathfrak{o} \neq \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{\mathfrak{p} \in U^*} \mathfrak{p} \leq \bigwedge_{A^* \in \mathfrak{a}^*} \bigvee_{\mathfrak{p} \in A^*} \mathfrak{p} = \mathfrak{w},$$

und wegen der Ultrafiltereigenschaft gilt sogar

$$\bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{\mathfrak{p} \in U^*} \mathfrak{p} = \mathfrak{w}.$$

Hierbei ist aber $\mathfrak{u}^*$ kein Ultrafilter von X, sondern von $\mathfrak{P}$. Die Filtermengen von $\mathfrak{u}^*$ besitzen daher im allgemeinen überabzählbare Mächtigkeit. Nur in Spezialfällen wird ein Ultrafilter $\mathfrak{u}^* \leq \mathfrak{a}^*$ existieren, der abzählbare Filtermengen besitzt, so daß man ihn auch als Filter von X auffassen kann. Auf derartige Sonderfälle bezieht sich die folgende Begriffsbildung.

Definition: *Ein Ultrafilter $\mathfrak{w}$ von X soll abzählbar-primitiv genannt werden, wenn es eine abzählbare Teilmenge $\{\mathfrak{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{w} \leq \bigvee \{\mathfrak{p}_n : n \in \mathbb{N}\}$ gibt.*

Jeder abzählbar-primitive Ultrafilter ist ein freier Ultrafilter: Für alle Punkte $x \in X$ ist $X \setminus \{x\}$ Filtermenge jedes freien Ultrafilters, insbesondere also jedes primitiven Ultrafilters, so daß jedenfalls $\widehat{x} \wedge \bigvee \{\mathfrak{p}_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathfrak{o}$ bei beliebiger Wahl der primitiven Ultrafilter gilt.

4.1 *Die abzählbar-primitiven Ultrafilter sind genau diejenigen Ultrafilter $\mathfrak{w}$, die eine Darstellung $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ mit einem Ultrafilter $\mathfrak{v}$ von X und einer Injektion $\alpha : X \to \mathfrak{P}$ besitzen.*

Beweis: Aus $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v},\alpha \rangle$ folgt

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{w}} \bigvee_{x \in V} \alpha x \leq \bigvee_{x \in X} \alpha x,$$

und $\{\alpha x \colon x \in X\}$ ist eine abzählbare Menge primitiver Ultrafilter.

Umgekehrt sei $\mathfrak{w}$ abzählbar-primitiv. Es gibt also eine abzählbare Menge primitiver Ultrafilter, die mit den Punkten von X indiziert werden können, so daß

$$\mathfrak{w} \leq \bigvee \{\mathfrak{p}_x \colon x \in X\} \tag{4}$$

erfüllt ist. Wegen 3.3 gibt es eine Zerlegung $\{Z_x \colon x \in X\}$ von X mit $Z_x \in \mathfrak{p}_x$ für alle $x \in X$. Mit der durch diese Zerlegung definierten Abbildung $\varphi\colon X \to X$, nämlich $\varphi y = x$ für $y \in Z_x$, sei dann $\mathfrak{v} = \varphi\mathfrak{w}$. Als Bild eines Ultrafilters ist $\mathfrak{v}$ selbst ein Ultrafilter. Gezeigt werden soll jetzt, daß für jede Filtermenge $V \in \mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w} \wedge \bigvee_{x \in V} \mathfrak{p}_x \neq \mathfrak{o} \tag{5}$$

gilt. Dann folgt auch mit der durch $\alpha x = \mathfrak{p}_x$ $(x \in X)$ definierten Injektion $\alpha\colon X \to \mathfrak{P}$

$$\mathfrak{w} \wedge \langle \mathfrak{v},\alpha \rangle = \mathfrak{w} \wedge \bigwedge_{V \in \mathfrak{w}} \bigvee_{x \in V} \mathfrak{p}_x \neq \mathfrak{o}.$$

Und weil $\mathfrak{w}$ und $\langle \mathfrak{v},\alpha \rangle$ Ultrafilter sind, ergibt sich hieraus sogar $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v},\alpha \rangle$, also die Behauptung. Nachzuweisen ist somit nur noch (5).

Zu V gibt es ein $W_1 \in \mathfrak{w}$ mit $\varphi W_1 \subset V$, also mit $W_1 \subset \bigcup\{Z_x \colon x \in V\}$. Nimmt man nun an, daß (5) nicht erfüllt ist, gibt es ein $W_2 \in \mathfrak{w}$ und Filtermengen $P_x \in \mathfrak{p}_x$ $(x \in V)$ mit $W_2 \cap \bigcup\{P_x \colon x \in V\} = \emptyset$. Schließlich gibt es wegen (4) ein $W_3 \in \mathfrak{w}$ mit $W_3 \subset \bigcup\{P_x \colon x \in V\} \cup \bigcup\{Z_y \colon y \in X \setminus V\}$. Dann ist $W = W_1 \cap W_2 \cap W_3$ eine Menge aus $\mathfrak{w}$ mit

$$\text{(1) } W \subset \bigcup_{x \in V} Z_x, \quad \text{(2) } W \cap \bigcup_{x \in V} P_x = \emptyset, \quad \text{(3) } W \subset \bigcup_{x \in V} P_x \cup \bigcup_{y \in X \setminus V} Z_y.$$

Aus (1) und (3) folgt aber $\emptyset \neq W \subset \bigcup\{P_x \colon x \in V\}$ im Widerspruch zu (2). •

Aus dem Beweis geht hervor, daß in einer Darstellung $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v},\alpha \rangle$ der Ultrafilter $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{w}$ sicher nicht eindeutig bestimmt ist. Er hing ja zum Beispiel von der willkürlichen Indizierung der primitiven Ultrafilter ab. Eine Änderung dieser Indizierung bewirkt allerdings nur, daß $\mathfrak{v}$ einer Bijektion unterworfen wird. Außerdem können noch die beteiligten primitiven Ultrafilter $\mathfrak{p}_x$ mit Indizes außerhalb einer Menge $V \in \mathfrak{v}$ beliebig abgeändert werden. Der folgende Satz zeigt aber, daß damit auch die mögliche Willkür bei einer solchen Darstellung von $\mathfrak{w}$ erschöpft ist.

4.2 *Es sei $\mathfrak{w}$ ein abzählbar-primitiver Ultrafilter, der Darstellungen*

$$\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v},\alpha \rangle = \langle \mathfrak{v}^*,\alpha^* \rangle$$

mit Ultrafiltern $\mathfrak{v},\mathfrak{v}^*$ von X und Injektionen $\alpha,\alpha^*\colon X \to \mathfrak{P}$ besitzt. Dann gibt es eine auf $\mathfrak{v}$ injektive Abbildung $\delta\colon X \to X$ mit $\mathfrak{v}^* = \delta\mathfrak{v}$ und $\alpha = \alpha^* \circ \delta$ mod $\mathfrak{w}$.

B e w e i s : Da die Mengen $A = \{\alpha x\colon x \in X\}$ und $A^* = \{\alpha^* x\colon x \in X\}$ primitiver Ultrafilter abzählbar sind, gilt dies auch für ihre Vereinigung $A \cup A^* = \{\mathfrak{p}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Wegen 3.3 gibt es eine Zerlegung $\{Z_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ von X mit $Z_n \in \mathfrak{p}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen

$$M_0 = \bigcup\{Z_n\colon \mathfrak{p}_n \in A \cap A^*\},\quad M_1 = \bigcup\{Z_n\colon \mathfrak{p}_n \in A \setminus A^*\},$$
$$M_2 = \bigcup\{Z_n\colon \mathfrak{p}_n \in A^* \setminus A\}$$

bilden daher ihrerseits eine Zerlegung von X. Und da $\mathfrak{w}$ ein Ultrafilter ist, kann nur genau eine dieser drei Mengen eine Filtermenge von $\mathfrak{w}$ sein. Wegen $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ muß $M_0 \cup M_1 \in \mathfrak{w}$ und wegen $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}^*, \alpha^* \rangle$ entsprechend $M_0 \cup M_2 \in \mathfrak{w}$ gelten. Es folgt somit

$$M_0 = (M_0 \cup M_1) \cap (M_0 \cup M_2) \in \mathfrak{w}.$$

Dann sind

$$V = \{x\colon M_0 \in \alpha x\} \quad \textit{und} \quad V^* = \{x\colon M_0 \in \alpha^* x\}$$

Filtermengen aus $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{v}^*$, und durch $\delta = \alpha^{*-1} \circ \alpha$ wird eine Bijektion $\delta\colon V \to V^*$ definiert. Es folgt $\alpha = \alpha^* \circ \delta$ auf V, also $\alpha = \alpha^* \circ \delta \bmod \mathfrak{v}$. Die Mengen

$$V_W = \{x\colon W \in \alpha x\} \quad \textit{und} \quad V_W^* = \{x\colon W \in \alpha^* x\}\ (W \in \mathfrak{w})$$

bilden Basen von $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{v}^*$ mit $\delta V_W = V_W^*$, woraus sich schließlich $\delta\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^*$ ergibt. ●

Die Darstellung abzählbar-primitiver Ultrafilter $\mathfrak{w}$ in der Form $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ ist also im Sinn des letzten Satzes bis auf Bijektionen eindeutig. Ausdrücklich bemerkt sei noch, daß die hierbei auftretenden Injektionen $\alpha\colon X \to \mathfrak{P}$ wegen 3.3 automatisch stark injektiv sind.

Es soll nun das Abbildungsverhalten abzählbar-primitiver Ultrafilter $\mathfrak{w}$ untersucht werden. Dazu sei wieder $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$, und $\varphi\colon X \to X$ sei eine beliebige Abbildung. Wegen 2.2 ist dann

$$\varphi\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \varphi(\alpha x).$$

Da $\mathfrak{v}$ ein Ultrafilter ist, gilt für die Menge

$$M = \{x\colon \varphi(\alpha x) \textit{ ist ein gebundener Ultrafilter}\}$$

entweder $M \in \mathfrak{v}$ oder $X \setminus M \in \mathfrak{v}$. Diese Fallunterscheidung hängt aber nicht von der speziellen Darstellung, also von $\mathfrak{v}$ und α, sondern wegen 4.2 nur von $\mathfrak{w}$ ab, da ja verschiedene Darstellungen durch Bijektionen aus einander hervorgehen. Nur der Einfachheit halber wird bei den folgenden Begriffsbildungen und Sätzen immer eine feste Darstellung $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ mit $\mathfrak{v} \in \mathfrak{A}$ und mit einer Injektion $\alpha\colon X \to \mathfrak{P}$ zugrunde gelegt.

Definition: *Eine Abbildung* $\varphi\colon X \to X$ *soll punktuell auf* $\mathfrak{w}$ *heißen, wenn es ein* $V \in \mathfrak{v}$ *gibt, so daß für alle* $x \in V$ *der Bildfilter* $\varphi(\alpha x)$ *ein gebundener Ultrafilter, also ein einpunktiger Hauptfilter ist.*

Die Abbildung φ *soll konservativ auf* $\mathfrak{w}$ *genannt werden, wenn es ein* $V \in \mathfrak{v}$ *gibt, so daß* φ *auf allen Filtern* αx *mit* $x \in V$ *injektiv ist, daß also* φ *die Eigenschaft „primitiver Ultrafilter" erhält.*

Diese beiden Begriffe entsprechen offenbar der obigen Fallunterscheidung: Im ersten Fall kann $V = M$, im zweiten $V = X \setminus M$ gewählt werden. Auf $\mathfrak{w}$ punktuelle Abbildungen sind auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiv. Für die nächsten Sätze soll neben der Darstellung $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ noch eine Zerlegung $\{Z_x : x \in X\}$ von X mit $Z_x \in \alpha x$ für alle $x \in X$ fest gewählt sein. In schon mehrfach benutzter Weise bestimmt sie eine Abbildung π durch $\pi y = x$ für $y \in Z_x$.

4.3 *Die Abbildung* π *ist auf* $\mathfrak{w}$ *punktuell, und es gilt* $\pi\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$. *Zu jeder auf* $\mathfrak{w}$ *ebenfalls punktuellen Abbildung* φ *gibt es eine Abbildung* φ' *mit* $\varphi = \varphi' \circ \pi \bmod \mathfrak{w}$, *also mit* $\varphi\mathfrak{w} = \varphi'\mathfrak{v}$.

Beweis: Wegen $Z_x \in \alpha x$ und $\pi Z_x = \{x\}$ folgt $\pi(\alpha x) = \hat{x}$. Daher ist π auf $\mathfrak{w}$ punktuell. Außerdem ergibt sich

$$\pi\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \pi(\alpha x) = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \hat{x} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \hat{V} = \mathfrak{v}.$$

Weiter sei φ auf $\mathfrak{w}$ ebenfalls punktuell. Es gibt also ein $V_0 \in \mathfrak{v}$ mit $\varphi(\alpha x) = \widehat{\varphi' x}$ für alle $x \in V_0$, wodurch gleichzeitig eine Abbildung: $\varphi' : V_0 \to X$ definiert wird. Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi\mathfrak{w} &= \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \varphi(\alpha x) = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \widehat{\varphi' x} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \widehat{\varphi' V} \\ &= \varphi'\mathfrak{v} = (\varphi' \circ \pi)\mathfrak{w} \end{aligned}$$

und daher $\varphi = \varphi' \circ \pi \bmod \mathfrak{w}$. ●

Im Fall einer auf $\mathfrak{w}$ konservativen Abbildung φ sind die Bildfilter $\varphi(\alpha x)$ für alle x aus einer geeigneten Filtermenge $V \in \mathfrak{v}$ wieder primitive Ultrafilter, die höchstens dann übereinstimmen können, wenn die entsprechenden Originalfilter αx äquivalent sind. Durch

$$x \underset{\varphi}{\approx} y : \leftrightarrow \varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha y)$$

wird auf X eine Äquivalenzrelation definiert. Es sei dann $\eta_\varphi : X \to X$ eine solche Abbildung, die jedem x einen fest gewählten Repräsentanten $\eta_\varphi x$ der von x erzeugten Äquivalenzklasse zuordnet, so daß also $\eta_\varphi x \underset{\varphi}{\approx} x$ gilt. Jede solche Abbildung η_φ soll eine zu φ gehörende Identifizierungsabbildung genannt werden.

Unabhängig von einer gegebenen Abbildung wird auch durch

$$x \approx x : \leftrightarrow \alpha x \sim \alpha y$$

eine Äquivalenzrelation bestimmt, und $\eta : X \to X$ sei wieder eine Abbildung, bei der ηx ein fester Repräsentant der von x erzeugten Äquivalenzklasse ist. Weiter sei nun aber noch für jedes x eine Bijektion $\varkappa_x : Z_x \to Z_{\eta x}$ so gewählt, daß $\varkappa_x(\alpha x) = \alpha(\eta x)$ erfüllt ist, was ja wegen $\alpha x \sim \alpha(\eta x)$ möglich ist. Speziell kann $\varkappa_{\eta x}$ als Identität von $Z_{\eta x}$ angenommen werden. Durch

$$\varkappa y = \varkappa_x y \quad \textit{für} \quad y \in Z_x$$

wird dann eine Abbildung $\varkappa : X \to X$ mit $\varkappa(\alpha x) = \alpha(\eta x)$ für alle $x \in X$ definiert.

4.4 *Es ist* $\varkappa$ *eine auf* $\mathfrak{w}$ *konservative Abbildung mit* $\varkappa\mathfrak{w} = \langle \eta\mathfrak{v}, \alpha \rangle$. *Genau dann ist* $\varkappa$ *injektiv auf* $\mathfrak{w}$, *wenn es ein* $V \in \mathfrak{v}$ *gibt, so daß die Filter* αx *mit* $x \in V$ *alle paarweise inäquivalent sind. Gleichwertig hiermit ist, daß* η *auf* V *die Identität ist.*

Zu jeder auf $\mathfrak{w}$ *konservativen Abbildung* φ *gibt es eine Abbildung* φ' *mit* $\varphi' \circ \varphi = \varkappa \bmod \mathfrak{w}$. *Es gilt* $\varphi\mathfrak{w} = \langle \eta_\varphi \mathfrak{v}, \varphi \circ \alpha \rangle$ *mit einer beliebigen Indentifizierungsabbildung* η_φ *von* φ.

B e w e i s : Wegen $\varkappa(\alpha x) = \alpha(\eta x)$ ist $\varkappa$ injektiv auf αx für alle $x \in X$, also jedenfalls konservativ auf $\mathfrak{w}$. Außerdem ergibt sich

$$\varkappa\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \alpha(\eta x) = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{y \in \eta V} \alpha y = \bigwedge_{V' \in \eta\mathfrak{v}} \bigvee_{y \in V'} \alpha y$$
$$= \langle \eta\mathfrak{v}, \alpha \rangle .$$

Weiter ist $\varkappa$ nach Konstruktion genau dann injektiv auf $\mathfrak{w}$, wenn η auf einer Menge $V \in \mathfrak{v}$ injektiv ist. Dies ist aber gleichwertig damit, daß die Filter αx für $x \in V$ alle paarweise inäquivalent sind, und dies ist wieder gleichwertig damit, daß η sogar die Identität auf V ist.

Schließlich sei jetzt φ eine auf $\mathfrak{w}$ konservative Abbildung mit einer zugehörigen Identifizierungsabbildung η_φ. Es gibt dann ein $V \in \mathfrak{v}$ und zu allen $x \in V$ Filtermengen $P_x \in \alpha x$, so daß $\varphi: P_x \to P_{\eta_\varphi x}$ eine Bijektion ist. Aus $\eta_\varphi x = \eta_\varphi y$ $(x, y \in V)$ folgt daher $\alpha x \sim \alpha y$ und damit $\eta x = \eta y$. Mit einer Abbildung η' gilt somit $\eta = \eta' \circ \eta_\varphi \bmod \mathfrak{v}$. Bei festem x und $y = \eta_\varphi x$ wird durch $\varphi'_y = \varkappa \circ \varphi^{-1}$ eine Abbildung: $\varphi'_y: P_{\eta_\varphi x} \to \varkappa P_x$ definiert und damit dann auch eine Abbildung $\varphi': \bigcup_{x \in V} P_{\eta_\varphi x} \to \varkappa \bigcup_{x \in V} P_x$. Auf der Filtermenge $W = \bigcup_{x \in V} P_x$ von $\mathfrak{w}$ gilt dann $\varkappa = \varphi' \circ \varphi$. Außerdem erhält man

$$\varphi\mathfrak{w} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \varphi(\alpha x) = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{x \in V} \varphi(\alpha(\eta_\varphi x)) = \bigwedge_{V' \in \eta_\varphi \mathfrak{v}} \bigvee_{y \in V'} \varphi(\alpha y)$$
$$= \langle \eta_\varphi \mathfrak{v}, \varphi \circ \alpha \rangle ,$$

weil ja $\varphi \circ \alpha$ auf $Im\ \eta_\varphi$ wieder injektiv ist. ●

5. Stabile Ultrafilter

Für die Struktur der prägeordneten Menge $\mathfrak{A}$ und der geordneten Menge $\hat{\mathfrak{A}}$ besitzt der Begriff des unteren bzw. oberen Nachbarn Bedeutung.

Definition: $\mathfrak{v}$ *heißt ein unterer Nachbar von* $\mathfrak{w}$ *und* $\mathfrak{w}$ *ein oberer Nachbar von* $\mathfrak{u}$, *wenn* $\mathfrak{v} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$, *aber nicht* $\mathfrak{v} \sim \mathfrak{w}$ *gilt und wenn aus* $\mathfrak{v} \blacktriangleleft \mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ *stets* $\mathfrak{u} \sim \mathfrak{v}$ *oder* $\mathfrak{u} \sim \mathfrak{w}$ *folgt.*

Gleichwertig hiermit sind wegen der Definition der Präordnung folgende zwei Bedingungen:

(1) *Es gibt eine auf* $\mathfrak{w}$ *nicht injektive Abbildung* φ *mit* $\varphi\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$.

(2) *Für jede Abbildung* ψ *mit* $\psi\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$ *folgt aus* $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$, *daß* ψ_1 *auf* $\mathfrak{w}$ *oder* ψ_2 *auf* $\psi_1\mathfrak{w}$ *injektiv ist.*

Die Nachbarschaftsbeziehung ist eine Klasseneigenschaft: Gilt $\mathfrak{v} \sim \mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{w} \sim \mathfrak{w}'$, so ist $\mathfrak{v}$ genau dann unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$, wenn $\mathfrak{v}'$ unterer Nachbar von $\mathfrak{w}'$ ist.

Es sei jetzt wieder $\mathfrak{w}$ ein abzählbar primitiver Ultrafilter mit der Darstellung $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$. Mit der punktuellen Abbildung π aus 4.3 gilt $\pi\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$. Weiter sei $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$ eine Abbildung, für die ebenfalls $\psi\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$ ist. Es gibt dann die beiden Möglichkeiten, daß ψ punktuell oder konservativ auf $\mathfrak{w}$ ist. Zunächst soll der erste Fall untersucht werden.

Es sei also ψ punktuell auf $\mathfrak{w}$. Wegen 4.3 folgt $\psi = \psi' \circ \pi$. Nun gilt aber $\mathfrak{v} = \psi\mathfrak{w} = \psi'(\pi\mathfrak{w}) = \psi'\mathfrak{v}$, weswegen nach 2.1 sogar $\psi' = \mathrm{id} \bmod \mathfrak{v}$ erfüllt sein muß. Daher gibt es ein $V \in \mathfrak{v}$ mit $\psi(\alpha x) = \pi(\alpha x) = \hat{x}$ für alle $x \in V$. Ist nun ψ_1 ebenfalls punktuell auf $\mathfrak{w}$, gilt also $\psi_1(\alpha x) = \widehat{\chi x}$ für alle x aus einer Filtermenge $V_1 \in \mathfrak{v}$ mit $V_1 \subset V$, so folgt $(\psi_2 \circ \chi)\hat{x} = (\psi_2 \circ \psi_1)(\alpha x) = \hat{x}$ und daher $\psi_2 \circ \chi = \mathrm{id} \bmod \mathfrak{v}$, so daß in diesem Fall ψ_2 auf $\psi_1\mathfrak{w}$ injektiv ist. Andernfalls ist ψ_1 konservativ auf $\mathfrak{w}$, es gibt also ein $V_2 \in \mathfrak{v}$ mit $V_2 \subset V$, so daß ψ_1 auf allen Filtern αx mit $x \in V_2$ injektiv ist. Wegen $\psi_2(\psi_1(\alpha x)) = \psi(\alpha x) = \hat{x}$ müssen dann aber die Bildfilter $\psi_1(\alpha x)$ für $x \in V_2$ alle paarweise verschieden sein, und nun ist ψ_1 sogar auf $\mathfrak{w}$ injektiv. Im Fall einer punktuellen Abbildung ψ ist also auch die Bedingung (2) dafür erfüllt, daß $\mathfrak{v}$ unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$ ist.

Anders liegen die Verhältnisse jedoch, wenn ψ auf $\mathfrak{w}$ konservativ ist. Wegen 4.4 gilt dann

$$\mathfrak{v} = \psi\mathfrak{w} = \langle \eta_\psi \mathfrak{v}, \psi \circ \alpha \rangle$$

mit einer zu ψ gehörenden Identifikationsabbildung η_ψ. Hier kann es aber vorkommen, daß sich im Sinn der Präordnung zwischen $\mathfrak{v}$ und $\eta_\psi\mathfrak{v}$ noch Ultrafilter (u. U. sogar unendlich viele) echt einfügen lassen. Dies führt dann zu einer Faktorisierung von η_ψ, die sich zu einer Faktorisierung von ψ liften läßt, wobei keine der Faktorabbildungen auf dem entsprechenden Filter injektiv ist. Tritt dieser Umstand ein, ist $\mathfrak{v}$ also kein unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$.

In vielen belangreichen Fällen tritt diese ungünstige Situation allerdings nicht ein, wie sich später zeigen wird. Außerdem gibt es aber auch einen speziellen Ultrafiltertyp, der diese Situation vermeidet.

Definition: *Ein Ultrafilter $\mathfrak{w}$ soll stabil genannt werden, wenn er einen unteren Nachbarn $\mathfrak{v}$ besitzt und wenn für alle Ultrafilter $\mathfrak{u}$ aus $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u} \not\sim \mathfrak{w}$ stets $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$ folgt.*

Offenbar sind primitive Ultrafilter auch stabil. Unmittelbar folgt aus der Definition, daß stabile Ultrafilter bis auf Äquivalenz nur genau einen unteren Nachbarn besitzen. Schließlich ist die Stabilität eine Klasseneigenschaft, weil mit $\mathfrak{w}$ auch jeder zu $\mathfrak{w}$ äquivalente Filter stabil ist.

5.1 *Ein Ultrafilter $\mathfrak{w}$ ist genau dann stabil, wenn es eine Abbildung φ gibt, die auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiv ist, und wenn zu jeder auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiven Abbildung ψ eine Abbildung φ' mit $\psi = \varphi' \circ \varphi \bmod \mathfrak{w}$ existiert.*

Beweis: Erstens sei $\mathfrak{w}$ stabil. Zu dem unteren Nachbarn $\mathfrak{v}$ aus der Definition gibt es dann wegen $\mathfrak{v} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ eine Abbildung φ mit $\varphi\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$, die auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiv ist. Weiter sei ψ ebenfalls auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiv. Für $\mathfrak{u} = \psi\mathfrak{w}$ gilt dann $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u} \not\sim \mathfrak{w}$. Es folgt $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$ und damit die Existenz einer Abbildung φ' mit $\varphi'\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$. Wegen $\psi\mathfrak{w} = \mathfrak{u} = \varphi'\mathfrak{v} = (\varphi' \circ \varphi)\mathfrak{w}$ erhält man $\psi = \varphi' \circ \varphi \bmod \mathfrak{w}$.

Zweitens existiere zu $\mathfrak{w}$ eine Abbildung φ mit den im Satz angegebenen Eigenschaften. Für $\mathfrak{v} = \varphi\mathfrak{w}$ gilt dann $\mathfrak{v} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v} \not\sim \mathfrak{w}$. Weiter folgt aus $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u} \not\sim \mathfrak{w}$ die Existenz einer auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiven Abbildung φ mit $\psi\mathfrak{w} = \mathfrak{u}$. Nach Voraussetzung gilt $\psi = \varphi' \circ \varphi \bmod \mathfrak{w}$ und daher $\mathfrak{u} = \psi\mathfrak{w} = (\varphi' \circ \varphi)\mathfrak{w} = \varphi'\mathfrak{v}$, also $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$. ●

5.2 *Ein abzählbar-primitiver Ultrafilter* $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ *mit* $\mathfrak{v} \in \mathfrak{A}$ *und einer Injektion* $\alpha\colon X \to \mathfrak{P}$ *ist genau dann stabil, wenn es ein* $V \in \mathfrak{v}$ *gibt, so daß die primitiven Ultrafilter* αx *mit* $x \in V$ *alle paarweise inäquivalent sind.*

Beweis: Es existiere ein $V \in \mathfrak{v}$, so daß die Filter αx für $x \in V$ alle paarweise inäquivalent sind. Dann ist jede auf $\mathfrak{w}$ nicht injektive Abbildung ψ auch nicht konservativ, also punktuell. Mit der auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiven Abbildung π aus 4.3 gilt nach diesem Satz $\psi = \varphi' \circ \pi$ mod $\mathfrak{w}$, mit $\varphi = \pi$ ist $\mathfrak{w}$ also nach 5.1 stabil.

Umgekehrt sei jetzt $\mathfrak{w}$ stabil, und φ sei die Abbildung aus 5.1. Da π auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiv ist, muß es nach 5.1 eine Abbildung φ' mit $\pi = \varphi' \circ \varphi$ geben. Wäre nun φ konservativ auf $\mathfrak{w}$, dürfte eine zugehörige Identifikationsabbildung η_φ auf $\mathfrak{v}$ nicht injektiv sein, was $\pi(\alpha x) = \hat{x}$ widerspricht. Daher muß φ auf $\mathfrak{w}$ punktuell sein, und wegen 4.3 muß umgekehrt auch $\varphi = \varphi'' \circ \pi$ erfüllt sein; das heißt φ stimmt mit π bis auf eine Bijektion auf $\mathfrak{w}$ überein. Nimmt man nun an, daß jede Filtermenge $V \in \mathfrak{v}$ verschiedene Punkte mit äquivalenten α-Bildern enthält, dann würde es eine auf allen Filtern αx injektive, also konservative Abbildung ψ geben, die jedoch die äquivalenten unter den Filtern αx auf gemeinsame Bildfilter abbildet und daher auf $\mathfrak{w}$ nicht injektiv ist. Wegen 5.1 müßte $\psi = \varphi^* \circ \pi$ mod $\mathfrak{w}$ gelten. Dies ist ein Widerspruch, weil schon π die Filter αx auf gebundene Ultrafilter abbildet, ψ aber nicht. ●

Da die Abbildung $\varkappa$ aus 4.4 genau die äquivalenten Ultrafilter αx identifiziert, ergibt sich aus dem letzten Satz, daß für jeden abzählbar-primitiven Ultrafilter $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ der mit der entsprechenden Abbildung $\varkappa$ gebildete Bildfilter $\varkappa\mathfrak{w}$ stabil ist.

6. Finite Ultrafilter

Definition: *Eine endliche Folge* $\mathfrak{u}_0, \dots, \mathfrak{u}_k$ *von Ultrafiltern heißt eine* $\mathfrak{u}$*-Folge, wenn* $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 \blacktriangleright \mathfrak{u}_1 \blacktriangleright \dots \blacktriangleright \mathfrak{u}_k$ *und* $\mathfrak{u}_{\varkappa-1} \not\sim \mathfrak{u}_\varkappa$ *für* $\varkappa = 1, \dots, k$ *gilt. Die Zahl k wird die Länge der Folge genannt.*

Ein Ultrafilter $\mathfrak{u}$ *heißt finit, wenn in* $\mathbb{N}$ *das Maximum* $h(\mathfrak{u})$ *aller Längen von* $\mathfrak{u}$*-Folgen existiert.*

Finite Ultrafilter $\mathfrak{u}$ mit $h(\mathfrak{u}) = 0$ sind genau die gebundenen, mit $h(\mathfrak{u}) = 1$ genau die primitiven Ultrafilter.

6.1 *Es sei* $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v}$, *und* $\mathfrak{v}$ *sei ein finiter Ultrafilter. Dann ist auch* $\mathfrak{u}$ *finit, es gilt* $h(\mathfrak{u}) \leq h(\mathfrak{v})$, *und* $\mathfrak{u} \sim \mathfrak{v}$ *ist gleichwertig mit* $h(\mathfrak{u}) = h(\mathfrak{v})$.

Beweis: Aus $\mathfrak{u} \sim \mathfrak{v}$ folgt, daß jede $\mathfrak{u}$-Folge auch eine $\mathfrak{v}$-Folge ist und umgekehrt. Daher ist dann auch $\mathfrak{u}$ finit, und es gilt $h(\mathfrak{u}) = h(\mathfrak{v})$. Weiter kann $\mathfrak{u} \not\sim \mathfrak{v}$ vorausgesetzt werden. Ist $\mathfrak{u}_0, \dots, \mathfrak{u}_k$ eine $\mathfrak{u}$-Folge, so ist $\mathfrak{v}, \mathfrak{u}_0, \dots, \mathfrak{u}_k$ eine $\mathfrak{v}$-Folge größerer Länge. Da $\mathfrak{v}$ finit ist, muß also auch $\mathfrak{u}$ finit sein, und es gilt $h(\mathfrak{u}) < h(\mathfrak{v})$. ●

6.2 *Es sei* $\mathfrak{u}$ *ein finiter Ultrafilter, und* $\mathfrak{u}_0, \dots, \mathfrak{u}_k$ *sei eine* $\mathfrak{u}$*-Folge mit* $k = h(\mathfrak{u})$. *Dann ist* $\mathfrak{u}_\varkappa$ *ein unterer Nachbar von* $\mathfrak{u}_{\varkappa-1}$ $(\varkappa = 1, \dots, k)$, *und* $\mathfrak{u}_k$ *ist ein gebundener Ultrafilter.*

Beweis: Wäre $\mathfrak{u}_\varkappa$ kein unterer Nachbar von $\mathfrak{u}_{\varkappa-1}$, würde es einen Ultrafilter $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{u}_{\varkappa-1} \blacktriangleright \mathfrak{v} \blacktriangleright \mathfrak{u}_\varkappa$ und mit $\mathfrak{u}_{\varkappa-1} \not\sim \mathfrak{v}$, $\mathfrak{v} \not\sim \mathfrak{u}_\varkappa$ geben. Dann wäre $\mathfrak{u}_0, \dots, \mathfrak{u}_{\varkappa-1}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}_\varkappa, \dots, \mathfrak{u}_k$ eine $\mathfrak{u}$-Folge der Länge $k+1$, was $h(\mathfrak{u})=k$ widerspricht. Derselbe Widerspruch würde sich ergeben, wenn $\mathfrak{u}_k$ ein freier Ultrafilter wäre, weil dann $\mathfrak{u}_0,\ldots,\mathfrak{u}_k,\hat{x}$ mit beliebigem $x\in X$ eine $\mathfrak{u}$-Folge der Länge $k+1$ sein würde. •

Weiter sollen nun speziell abzählbar-primitive finite Ultrafilter betrachtet werden, die sich überdies aus abzählbar-primitiven Ultrafiltern aufbauen lassen.

Definition: $H_0=$ *Menge aller gebundenen Ultrafilter.*
$H_{k+1}=$ *Menge aller abzählbar-primitiven Ultrafilter* $\mathfrak{w}$ *mit* $\mathfrak{w}=\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle$, $\mathfrak{v}\in H_k$ *und einer Injektion* $\alpha\colon X\to\mathfrak{P}$.

Offenbar ist H_1 die Menge genau aller primitiven Ultrafilter.

6.3 *Es sei* $\mathfrak{w}\in H_k$. *Dann ist* $\mathfrak{w}$ *ein finiter Ultrafilter mit* $h(\mathfrak{w})=k$. *Aus* $\mathfrak{u}\blacktriangleleft\mathfrak{w}$ *folgt* $\mathfrak{u}\in H_m$ *mit* $m\leq k$, *wobei* $m=k$ *gleichwertig mit* $\mathfrak{u}\sim\mathfrak{w}$ *ist.*

Beweis: Die Behauptungen werden durch Induktion über k bewiesen. Da sie für $k=0$ trivial sind, sei weiter $k>0$ vorausgesetzt. Es gilt dann $\mathfrak{w}=\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle$ mit $\mathfrak{v}\in H_{k-1}$.

Zunächst sei jetzt $\mathfrak{u}\blacktriangleleft\mathfrak{w}$. Im Fall $\mathfrak{u}\sim\mathfrak{w}$ folgt unmittelbar $\mathfrak{u}\in H_k$. Andernfalls gibt es eine auf $\mathfrak{w}$ nicht injektive Abbildung φ mit $\mathfrak{u}=\varphi\mathfrak{w}$. Ist φ punktuell auf $\mathfrak{w}$, gibt es nach 4.3 eine Abbildung φ' mit $\varphi=\varphi'\circ\pi$ und $\mathfrak{u}=\varphi'\mathfrak{v}$, also mit $\mathfrak{u}\blacktriangleleft\mathfrak{v}$. Wegen $\mathfrak{v}\in H_{k-1}$ folgt nach Induktionsvoraussetzung jetzt $\mathfrak{u}\in H_m$ mit einem $m\leq k-1$. Andernfalls ist φ konservativ auf $\mathfrak{w}$, und wegen 4.4 gilt $\mathfrak{u}=\varphi\mathfrak{w}=\langle\eta_\varphi\mathfrak{v},\varphi\circ\alpha\rangle$ mit einer zu φ gehörenden Identifikationsabbildung η_φ, die auf $\mathfrak{v}$ nicht injektiv ist. Wegen $\eta_\varphi\mathfrak{v}\blacktriangleleft\mathfrak{v}$, $\eta_\varphi\mathfrak{v}\not\sim\mathfrak{v}$ folgt jetzt nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{v}'=\eta_\varphi\mathfrak{v}\in H_l$ mit $l<k-1$ und wegen $\mathfrak{u}=\langle\mathfrak{v}',\varphi\circ\alpha\rangle$ nach Definition $\mathfrak{u}\in H_m$ mit $m=l+1\leq k-1$.

Schließlich sei $\mathfrak{w}=\mathfrak{w}_0,\mathfrak{w}_1,\ldots,\mathfrak{w}_r$ eine beliebige $\mathfrak{w}$-Folge. Es gilt also $\mathfrak{w}_1\blacktriangleleft\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}_1\not\sim\mathfrak{w}$ und nach dem bereits Bewiesenen $\mathfrak{w}_1\in H_m$ mit $m<k$. Jede $\mathfrak{w}$-Folge hat somit höchstens die Länge k. Daher ist $\mathfrak{w}$ ein finiter Ultrafilter mit $h(\mathfrak{w})\leq k$. Wegen $\mathfrak{v}\in H_{k-1}$ gibt es aber eine $\mathfrak{v}$-Folge $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_0,\mathfrak{v}_1,\ldots,\mathfrak{v}_{k-1}$, und wegen $\mathfrak{v}\blacktriangleleft\mathfrak{w}$, $\mathfrak{v}\not\sim\mathfrak{w}$ ist dann $\mathfrak{w},\mathfrak{v}_0,\ldots,\mathfrak{v}_{k-1}$ eine $\mathfrak{w}$-Folge der Länge k, so daß sogar $h(\mathfrak{w})=k$ ist. •

6.4 *Es sei* $\mathfrak{u}\blacktriangleleft\mathfrak{w}$, $\mathfrak{u}\in H_m$, $\mathfrak{w}\in H_k$ *und* $m<k-1$. *Dann gibt es zu jedem* l *mit* $m<l<k$ *einen Ultrafilter* $\mathfrak{u}^*\in H_l$ *mit* $\mathfrak{u}\blacktriangleleft\mathfrak{u}^*\blacktriangleleft\mathfrak{w}$.

Beweis: Im Fall $k=2$ muß notwendig $m=0$ und $l=1$ sein. Wegen $\mathfrak{w}=\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle$ mit $\mathfrak{v}\in H_1$ ist dann die Behauptung immer mit $\mathfrak{u}^*=\mathfrak{v}$ erfüllt. Für den weiteren Induktionsbeweis sei $k>2$ und $\mathfrak{w}=\langle\mathfrak{v},\alpha\rangle$ mit $\mathfrak{v}\in H_{k-1}$. Wegen $\mathfrak{u}\blacktriangleleft\mathfrak{w}$ und $h(\mathfrak{u})=m<k=h(\mathfrak{w})$ gibt es eine auf $\mathfrak{w}$ nicht injektive Abbildung φ mit $\mathfrak{u}=\varphi\mathfrak{w}$. Man hat dann wieder zwischen den beiden Fällen zu unterscheiden, daß φ punktuell auf $\mathfrak{w}$ oder konservativ auf $\mathfrak{w}$ ist.

Erstens sei φ punktuell auf $\mathfrak{w}$. Nach 4.3 folgt $\varphi=\varphi'\circ\pi$ und wegen $\pi\mathfrak{w}=\mathfrak{v}$, $\varphi'\mathfrak{v}=\mathfrak{u}$ weiter $\mathfrak{u}\blacktriangleleft\mathfrak{v}\blacktriangleleft\mathfrak{w}$. Da $\mathfrak{v}\in H_{k-1}$ gilt, ist im Fall $l=k-1$ die Behauptung mit $\mathfrak{u}^*=\mathfrak{v}$ erfüllt. Im Fall $l<k-1$ gibt es nach Induktionsvoraussetzungen einen Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ mit $\mathfrak{u}\blacktriangleleft\mathfrak{u}^*\blacktriangleleft\mathfrak{v}\blacktriangleleft\mathfrak{w}$.

Zweitens sei jetzt φ auf $\mathfrak{w}$ konservativ. Nach 4.4 gilt dann $\mathfrak{u}=\varphi\mathfrak{w}=\langle\eta_\varphi\mathfrak{v},\varphi\circ\alpha\rangle$ mit einer auf $\mathfrak{v}$ nicht injektiven Identifikationsabbildung η_φ. Wegen $\mathfrak{u}\in H_m$ folgt $\mathfrak{v}'=\eta_\varphi\mathfrak{v}\in H_{m-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es daher einen Ultrafilter $\mathfrak{v}^*\in H_{l-1}$ mit $\mathfrak{v}'\blacktriangleleft\mathfrak{v}^*\blacktriangleleft\mathfrak{v}$.

Es folgt die Existenz von Identifizierungsabbildungen η', η'' mit $\eta_\varphi = \eta'' \circ \eta'$, $\mathfrak{v}^* = \eta' \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}' = \eta'' \mathfrak{v}^*$. Dann sei $\mathfrak{u}^* = \langle \mathfrak{v}^*, \varphi' \circ \alpha \rangle$, wobei φ' eine solche Abbildung ist, für die $\varphi'(\alpha x) = \varphi(\alpha(\eta' x))$ gilt, während eine zweite Abbildung φ'' mit $\varphi = \varphi'' \circ \varphi'$ die restliche Zusammenfassung von α-Bildern gemäß η'' bewirkt. Es folgt $\varphi' \mathfrak{w} = \mathfrak{u}^*, \varphi'' \mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}$ und wegen $\mathfrak{v}^* \in H_{l-1}$ auch $\mathfrak{u}^* \in H_l$. ●

6.5 *Es sei* $\mathfrak{w} \in H_k$. *Ein Ultrafilter* $\mathfrak{u}$ *ist genau dann unterer Nachbar von* $\mathfrak{w}$, *wenn* $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ *und* $\mathfrak{u} \in H_{k-1}$ *gilt.*

Beweis: Zunächst sei $\mathfrak{u}$ unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$. Dann folgt $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u} \not\sim \mathfrak{w}$. Wegen 6.3 ergibt sich $\mathfrak{u} \in H_m$ mit $m \leq k-1$. Aus $m < k-1$ würde nach 6.4 die Existenz eines Filters $\mathfrak{u}^* \in H_{k-1}$ mit $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{u}^* \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u} \not\sim \mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{u}^* \not\sim \mathfrak{w}$ folgen im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{u}$ unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$ ist.

Zweitens sei $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u} \in H_{k-1}$ erfüllt, also auch $h(\mathfrak{u}) = k-1 < k = h(\mathfrak{w})$ und damit $\mathfrak{u} \not\sim \mathfrak{w}$. Aus $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{v} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ folgt $k-1 = h(\mathfrak{u}) \leq h(\mathfrak{v}) \leq h(\mathfrak{w}) = k$ nach 6.1. Es muß also an einer Stelle das Gleichheitszeichen stehen, was wieder wegen 6.1 entweder $\mathfrak{u} \sim \mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{v} \sim \mathfrak{w}$ nach sich zieht. Daher ist $\mathfrak{u}$ ein unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$. ●

6.6 *Es sei* $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$, $\mathfrak{u} \in H_m$ *und* $\mathfrak{w} \in H_k$ *mit* $m < k$. *Dann gibt es eine* $\mathfrak{w}$*-Folge* $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0, \ldots, \mathfrak{w}_k$ *mit* $\mathfrak{w}_{k-m} = \mathfrak{u}$.

Beweis: Für die gesuchte $\mathfrak{w}$-Folge muß wegen 6.2 jedenfalls $\mathfrak{w}_\varkappa \in H_{k-\varkappa}$ $(\varkappa = 0, \ldots, k)$ erfüllt sein. Im Fall $m = 0$ ist $\mathfrak{u}$ ein gebundener Ultrafilter, der wegen der Äquivalenz aller gebundenen Ultrafilter gegen $\mathfrak{w}_k$ bei jeder derartigen $\mathfrak{w}$-Folge ausgetauscht werden kann. Im Fall $m > 0$ ist $\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}, \mathfrak{u}, \dot{x}$ mit festem $x \in X$ eine $\mathfrak{w}$-Folge, in die durch endlichfache Anwendung von 6.4 entsprechende Ultrafilter eingefügt werden können. ●

Eine maximale $\mathfrak{w}$-Folge eines finiten Filters $\mathfrak{w}$, also eine nicht mehr erweiterbare Folge, liegt genau dann vor, wenn jeder Folgefilter unterer Nachbar des vorangegangenen Filters und der letzte Filter ein gebundener Ultrafilter ist. Die Definition von $h(\mathfrak{w})$ besagt, daß es eine maximale $\mathfrak{w}$-Folge der Länge $h(\mathfrak{w})$ gibt. Sie besagt jedoch nicht, daß jede maximale $\mathfrak{w}$-Folge die Länge $h(\mathfrak{w})$ haben muß; es könnte auch kürzere derartige Folgen geben. Daß dies bei Filtern $\mathfrak{w} \in H_k$ nicht der Fall ist, liegt an dem Ergebnis aus 6.3, nach dem alle Ultrafilter $\mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$ ebenfalls in einer Menge H_m mit $m \leq k$ liegen. Erst hiermit ergibt sich, daß alle maximalen $\mathfrak{w}$-Folgen die Länge $h(\mathfrak{w})$ besitzen.

6.7 *Es sei* $\mathfrak{w} \in H_k$ *mit* $k \geq 1$. *In* $\hat{\mathfrak{A}}$ *besitzt* $\hat{\mathfrak{w}}$ *dann* n *untere Nachbarn mit* $1 \leq n \leq k$, *und es gibt Filter in* H_k, *bei denen* $n = k$ *erreicht wird.*

Beweis: Im Fall $k = 1$ ist $\mathfrak{w}$ ein primitiver Ultrafilter. Die Klasse $\hat{\mathfrak{w}}$ ist ein Atom von $\hat{\mathfrak{A}}$ und besitzt als einzigen unteren Nachbarn die Klasse der gebundenen Ultrafilter. Es gilt also $n = 1 = k$. Der weitere Beweis erfolgt durch Induktion über k, wobei jetzt $k > 1$ vorausgesetzt werden kann. Der Filter $\mathfrak{w}$ besitzt nach 4.2 eine bis auf Bijektionen eindeutige Darstellung $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$ mit $\mathfrak{v} \in H_{k-1}$ und einer Injektion $\alpha: X \to \mathfrak{P}$. Wegen 4.3 gilt $\mathfrak{v} = \pi \mathfrak{w}$, also $\mathfrak{v} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$, und nach 6.5 ist $\mathfrak{v}$ ein unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$ und $\hat{\mathfrak{v}}$ somit ein unterer Nachbar von $\hat{\mathfrak{w}}$ in $\hat{\mathfrak{A}}$. Wenn $\mathfrak{w}$ ein stabiler Ultrafilter ist, ist $\mathfrak{v}$ bis auf Äquivalenz auch der einzige untere Nachbar von $\mathfrak{w}$. Andernfalls kann es weitere untere Nachbarn geben.

Es sei $\mathfrak{u}$ ein zu $\mathfrak{v}$ inäquivalenter unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$; es gilt also $\mathfrak{u} \in H_{k-1}$. Dann gibt es eine Abbildung φ mit $\varphi\mathfrak{w} = \mathfrak{u}$, wobei φ eine auf $\mathfrak{w}$ nicht injektive und konservative Abbildung sein muß. Nach 4.4 gilt $\mathfrak{u} = \varphi\mathfrak{w} = \langle \eta_\varphi\mathfrak{v}, \varphi \circ \alpha \rangle$ mit einer zu φ gehörenden Identifizierungsabbildung η_φ. Wegen $\mathfrak{u} \in H_{k-1}$ folgt $\mathfrak{v}' = \eta_\varphi\mathfrak{v} \in H_{k-2}$, weswegen $\mathfrak{v}'$ ein unterer Nachbar von $\mathfrak{v}$ ist. Aus dem Mechanismus der konservativen Abbildungen, die ja nur äquivalente Filter αx zusammenfassen, und aus der Definition der Identifizierungsabbildungen ergibt sich außerdem, daß zu zwei inäquivalenten derartigen unteren Nachbarn $\mathfrak{u}$ auch inäquivalante untere Nachbarn $\mathfrak{v}'$ von $\mathfrak{v}$ gehören. Daher kann die Anzahl inäquivalenter unterer Nachbarn von $\mathfrak{w}$, die aus konservativen Abbildungen hervorgehen, höchstens gleich der Anzahl inäquivalenter unterer Nachbarn von $\mathfrak{v}$, nach Induktionsvoraussetzung also höchstens $k-1$ sein. Berücksichtigt man nun außerdem den zusätzlichen unteren Nachbarn $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{w}$, so folgt $1 \leq n \leq k$. Zu zeigen ist somit nur noch, daß die Maximalzahl k auch tatsächlich erreicht wird.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Filter $\mathfrak{v} \in H_{k-1}$, der $k-1$ inäquivalente untere Nachbarn $\mathfrak{v}'_1, \ldots, \mathfrak{v}'_{k-1} \in H_{k-2}$ besitzt. Es sei $\mathfrak{v}'_\varkappa = \psi_\varkappa\mathfrak{v}$ für $\varkappa = 1, \ldots, k-1$. Zu jedem Punkt $y \in Im\ \psi_\varkappa$ wähle man nun einen Punkt $x_\varkappa(y) \in X$ mit $\psi_\varkappa(x_\varkappa(y)) = y$. Durch $\eta_\varkappa x = x_\varkappa(\psi_\varkappa(x))$ wird dann für $\varkappa = 1, \ldots, k-1$ je eine Identifizierungsabbildung definiert. Offenbar gilt $\psi_\varkappa = \delta_\varkappa \circ \eta_\varkappa$ mit einer Bijektion $\delta_\varkappa$: $Im\ \eta_\varkappa \to Im\ \psi_\varkappa$, so daß $\mathfrak{v}'_\varkappa$ und $\mathfrak{v}''_\varkappa = \eta_\varkappa\mathfrak{v}$ äquivalente, $\mathfrak{v}''_1, \ldots, \mathfrak{v}''_{k-1}$ aber paarweise inäquivalente Ultrafilter sind. Weiter sei nun noch $\mathfrak{Z} = \{Z_x \colon x \in X\}$ eine Zerlegung von X in unendliche Teilmengen Z_x, es sei x_0 ein fester Punkt, und für jeden Punkt $x \in X$ sei τ_x: $Z_{x_0} \to Z_x$ eine Bijektion, wobei speziell $\tau_{x_0} = id$ gewählt werden kann.

Wegen $\mathfrak{v} \in H_{k-1}$ gilt $\mathfrak{v} = \langle \mathfrak{u}, \beta \rangle$ mit $\mathfrak{u} \in H_{k-2}$ und einer Injektion β: $X \to \mathfrak{P}$. Dann sei $\mathfrak{p}$ ein primitiver Ultrafilter mit $Z_{x_0} \in \mathfrak{p}$, der zu allen Ultrafiltern βx $(x \in X)$ inäquivalent ist. Durch $\alpha x = \tau_x\mathfrak{p}$ wird eine Injektion α: $X \to \mathfrak{P}$ definiert. Dann sei $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$. Es folgt $\mathfrak{w} \in H_k$ und nach 4.3 auch $\pi\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$ mit der zu $\mathfrak{Z}$ gehörenden Projektionsabbildung π, also $\mathfrak{v} \blacktriangleleft \mathfrak{w}$. Nach 5.6 ist daher $\mathfrak{v}$ ein unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$.

Für $\varkappa = 1, \ldots, k-1$ wird nun weiter durch $\varphi_\varkappa y = \delta_{\eta x} \circ \delta_x^{-1}$ für $y \in Z_x$ eine Abbildung $\varphi_\varkappa$: $X \to X$ definiert, die auf allen Filtern αx injektiv und daher auf $\mathfrak{w}$ konservativ ist und für die $\eta_\varkappa$ eine zugehörige Identifizierungsabbildung ist. Man erhält nach 4.4

$$\varphi_\varkappa\mathfrak{w} = \langle \eta_\varkappa\mathfrak{v}, \varphi_\varkappa \circ \alpha \rangle = \langle \mathfrak{v}''_\varkappa, \varphi_\varkappa \circ \alpha \rangle \in H_{k-1},$$

so daß auch $\varphi_\varkappa\mathfrak{w}$ ein unterer Nachbar von $\mathfrak{w}$ ist. Da $\varphi_\varkappa\mathfrak{w} \sim \varphi_\lambda\mathfrak{w}$ auch $\mathfrak{v}'_\varkappa \sim \mathfrak{v}''_\varkappa \sim \mathfrak{v}''_\lambda \sim \mathfrak{v}'_\lambda$ nach sich ziehen würde, diese Ultrafilter aber inäquivalent sind, folgt, daß $\varphi_1\mathfrak{w}, \ldots, \varphi_{k-1}\mathfrak{w}$ paarweise inäquivalente untere Nachbarn von $\mathfrak{w}$ sind. Sie sind aber außerdem zu dem unteren Nachbarn $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{w}$ inäquivalent: Es galt ja $\mathfrak{v} = \langle \mathfrak{u}, \beta \rangle$, wobei alle primitiven Ultrafilter βx inäquivalent zu $\mathfrak{p}$ waren, während in der Darstellung $\varphi_\varkappa\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}''_\varkappa, \varphi_\varkappa \circ \alpha \rangle$ alle Filter $(\varphi_\varkappa \circ \alpha)y$ für beliebige $y \in X$ zu $\mathfrak{p}$ äquivalent sind. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{w}$ die k inäquivalenten unteren Nachbarn $\mathfrak{v}, \varphi_1\mathfrak{w}, \ldots, \varphi_{k-1}\mathfrak{w}$ besitzt. ●

7. Ordnungsstruktur der finiten Klassen

Die der Menge $H = \bigcup\{H_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar-primitiver und finiter Ultrafilter entsprechende Teilmenge $\hat{H}$ von $\mathfrak{A}$ besitzt zwar schon eine recht komplizierte, aber doch noch gut zu überblickende Ordnungsstruktur. Jede Klasse aus $\hat{H}$ besitzt überabzählbar viele obere Nachbarn, jedoch entsprechend dem letzten Satz des vorangehenden Abschnitts nur endlich viele untere Nachbarn. Stabile Klassen haben nur genau einen unteren Nachbarn. Die Teilmenge aller stabilen Klassen ist also hinsichtlich ihrer Ordnungsstruktur ein Baum. Aber auch bei nicht stabilen Klassen $\hat{\mathfrak{w}}$ lassen sich die unteren Nachbarn noch verhältnismäßig gut übersehen: Besitzt $\mathfrak{w}$ die Darstellung $\mathfrak{w} = \langle \mathfrak{v}, \alpha \rangle$, so ist stets $\hat{\mathfrak{v}}$ unterer Nachbar von $\hat{\mathfrak{w}}$. Etwaige weitere untere Nachbarn entsprechen inäquivalenten unteren Nachbarn $\mathfrak{v}'$ von $\mathfrak{v}$, sofern diese in folgendem Sinn mit der Abbildung α verträglich sind. Es sei $\mathfrak{v}' = \psi\mathfrak{v}$. Dann muß es eine Filtermenge $V \in \mathfrak{v}$ mit der Eigenschaft geben, daß allen Punkten $x_1, x_2 \in V$ mit $\psi x_1 = \psi x_2$ auch äquivalente primitive Ultrafilter $\alpha x_1, \alpha x_2$ entsprechen. Das Kontraktionsverhalten der Abbildung ψ muß also durch die Äquivalenz der Filter αx gedeckt sein.

Unter den Fragen, die in einer späteren Arbeit untersucht werden sollen, ist die nächstliegende, wie man in $\mathfrak{A}$ hinsichtlich der Präordnung $\blacktriangleleft$ über H hinaus aufsteigen kann. Es sei etwa $(\mathfrak{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine echt aufsteigende Folge in H. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte also $\mathfrak{u}_n \blacktriangleleft \mathfrak{u}_{n+1}$ und $\mathfrak{u}_n \not\blacktriangleright \mathfrak{u}_{n+1}$; d.h. es gibt Abbildungen φ_n mit $\varphi_n \mathfrak{u}_{n+1} = \mathfrak{u}_n$, wobei φ_n auf $\mathfrak{u}_{n+1}$ nicht injektiv ist. Es fragt sich dann, wie man in $\mathfrak{A}$ zu oberen Schranken oder gar Suprema der Folge $(\mathfrak{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kommen kann.

Sicher bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn man voraussetzt, daß $\{\mathfrak{u}_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ein disjunktes System ist, daß es also eine Zerlegung $\{Z_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ von X mit $Z_n \in \mathfrak{u}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Ist nun $\mathfrak{v}^*$ ein (primitiver) Ultrafilter von $\mathbb{N}$, so erweist sich der Ultrafilter

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \ \bigvee_{n \in V^*} \mathfrak{u}_n$$

als obere Schranke der Folge $(\mathfrak{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Es gibt für alle $n \in \mathbb{N}$ Abbildungen ψ_n mit $\psi_n \mathfrak{w} = \mathfrak{u}_n$ und mit $\psi_n = \varphi_n \circ \psi_{n+1}$. Der so gewonnene Filter $\mathfrak{w}$ ist wieder ein abzählbar-primitiver (aber nicht finiter) Ultrafilter, der jedoch nicht etwa ein Supremum der Folge ist. Man kann echt absteigende Folgen derartiger oberer Schranken konstruieren, so daß erst ein entsprechender Limesprozeß zu einem Supremum führen könnte.